L1-S1-MPI – **2012-2013 SESSION 2 – (MS1)**

CORRIGÉ de l'EXAMEN DE MATHS POUR SCIENCES

EXERCICE 1 : a) $A\cdot B=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}(1\ 1\ 1)=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}\in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$

$B\cdot A=(1,1,1)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=(6)\in\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$

${}^tB\cdot{}^tA=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}(1\ 2\ 3)=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$

b) $\det(BA)=6$; $\det(AB)=0$ (car il a deux lignes égales)

EXERCICE 2 : a) $\sin(4x)=(4x)-\dfrac{(4x)^3}{3!}+x^4\varepsilon(x)$ (où $\varepsilon_{x\to 0}\to 0$, $x\to 0$)

$\dfrac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4+x^5\varepsilon(x)$ donc, par produit,

$$\frac{\sin(4x)}{1+x^2}=4x-\frac{4\cdot4\cdot4}{2\cdot3}x^3+x^4\varepsilon(x)+4x^3=4x-\frac{44}{3}x^3+o(x^4)$$

b) $$\frac{e^{-x^2}(\sin x-x)}{x(\cos x-1)}=\frac{e^{-x^2}\left(\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)\right)-x\right)}{x\left(\left(1-\frac{x^2}{2!}+o(x^3)\right)-1\right)}\underset{x\to0}{\longrightarrow}\frac{1}{3}$$

EXERCICE 3 : a) $P\equiv P(2,1,1)\in\mathcal{P}$ (par vérification)

$x-y+z=2\iff 1\cdot(x-2)-1\cdot(y-1)+1\cdot(z-1)=0$

$\iff\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}x-2\\y-1\\z-1\end{pmatrix}=0$ (prod. scalaire)

donc $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ **est normal à $\mathcal{P}$.**

De même, on trouve $P'\equiv P'(1,0,1)\in\mathcal{P}'$, donc

$x+2y+3z=4\iff 1\cdot(x-1)+2(y-0)+3(z-1)=0$

$\iff\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}x-1\\y-0\\z-1\end{pmatrix}=0$ donc $\vec{n}'=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ **est normal à $\mathcal{P}'$**

b) Les plans ne sont pas parallèles s'ils sont concourants, i.e. s'ils ont une intersection non-vide. Donc ssi le système (S) : $\begin{cases}x-y+z=2\\x+2y+3z=4\end{cases}$ est compatible (i.e. admet au moins une solution). C'est le cas, car par ex. si $z=0$, $\begin{cases}x-y=2\\x+2y=4\end{cases}$ a comme (unique) solution $x=8/3$ et $y=2/3$.

Autrement, on pourrait vérifier que le prod. vectoriel de $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ trouvés auparavant est $\neq\vec{0}_{\mathbb{R}^3}$.

c) Les équations cartésiennes de $\mathcal{D}=\mathcal{P}\cap\mathcal{P}'$ sont données par le syst. (S) de (b). Pour trouver une éq. paramétrique de $\mathcal{D}$ il suffit de voir dans (S) une des inconnues comme paramètre "t".

Par ex. si $z=t$, $(S)\iff\begin{cases}x-y=2-t\\x+2y=4-3t\end{cases}$

qui est un syst. de Cramer (car $\Delta=\begin{vmatrix}1&-1\\1&2\end{vmatrix}=3$)

La sol. $x=\dfrac{\begin{vmatrix}2-t&-1\\4-3t&2\end{vmatrix}}{3}=\dfrac{8}{3}-\dfrac{5}{3}t$; $y=\dfrac{\begin{vmatrix}1&2-t\\1&4-3t\end{vmatrix}}{3}=\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{3}t$

Donc **tout point D de la droite $\mathcal{D}=\mathcal{P}\cap\mathcal{P}'$ est du type** $\begin{pmatrix}8/3\\2/3\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-5/3\\-2/3\\1\end{pmatrix}$ où $\vec{u}=\begin{pmatrix}-5/3\\-2/3\\1\end{pmatrix}$ **est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.**

d) Si $\tilde{\mathcal{P}}\perp\mathcal{D}$, le vecteur $\vec{u}$ directeur de $\mathcal{D}$ sera donc normal à $\tilde{\mathcal{P}}$ et alors l'équation de $\tilde{P}$ sera du type $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$ où $\vec{u}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $M=M(x_0,y_0,z_0)$, donc ds. notre cas :

$-\frac{5}{3}(x-1)-\frac{2}{3}(y-0)+1(z+1)=0$ i.e. $5x+2y-3z=8$.

e) $\mathcal{I}=P\cap P'\cap\tilde{P}=\mathcal{D}\cap\tilde{P}$. Pour trouver cet ensemble, soit (1) on résoud un système à 3 inconnues x,y,z et à 3 éq (celles des 3 plans P, P' et $\tilde{P}$), soit (2) comme $M=M(1,0,-1)\in\tilde{P}$ et $\tilde{P}\perp\mathcal{D}$, il suffira de trouver la projection orthogonale de M sur $\mathcal{D}$.

Pour (1) remarquer que le système est de Cramer car $P\cap P'$ est concourant à $\tilde{P}$ en un seul pt. par déf. de $\tilde{P}\perp\mathcal{D}$.

Après calcul, on obtient l'unique point

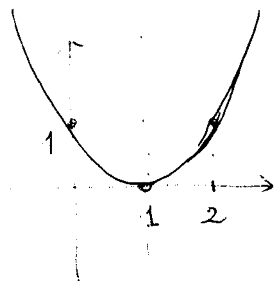
$\mathcal{I}=\left\{\left(\frac{34}{19},\frac{6}{19},\frac{10}{19}\right)\right\}$.

<u>EXERCICE 4</u> (1.a) On passe à la limite quand $n\to\infty$ dans (R) en supposant que $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}u_{n+1}=\ell$ existe, et on a : $\ell=(\ell-1)^2\iff\ell^2-3\ell+1=0\iff$

$\ell=\frac{3\pm\sqrt{9-4}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\approx$ $\ell_+=2{,}62>2$ ou $\ell_-=0{,}38<\frac{1}{2}$

(1.b) $f'(x)=(x-1)^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$

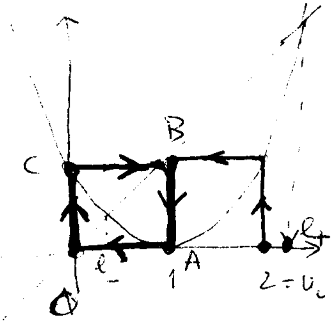
(1.c) $f'(x)=0\iff x=1$ (rac. double) c'est une parabole (voir figure)



(2.a) Hyp: $u_0=2$.

$u_1=1$; $u_2=0$; $u_3=1$; $u_4=0$ etc... Il s'agit d'une suite alternée, donc qui n'a pas de limite.

Donc, après u_1, la toile d'araignée est le carré CABC parcouru un nb. infini de fois (sans qu'on "converge" vers le pt. (ℓ_-,ℓ_-))



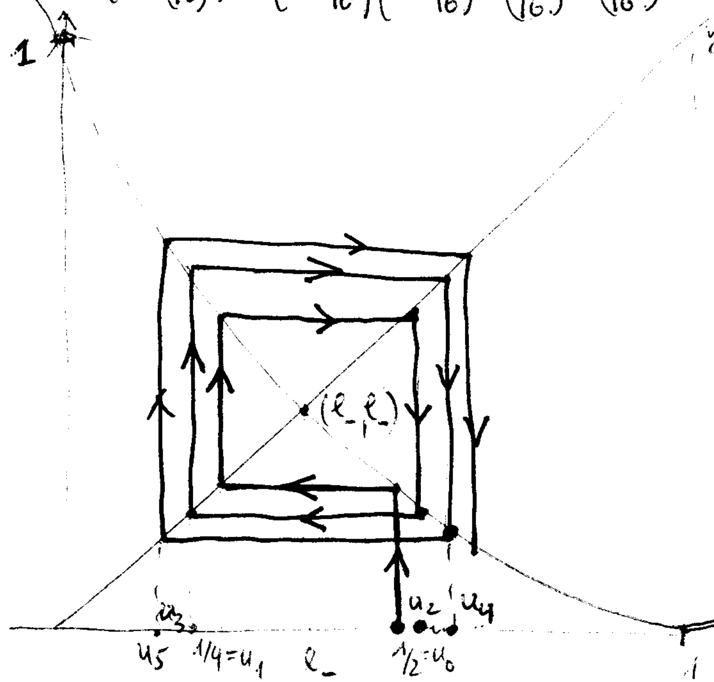
(2.b) Hyp : $u_0=1/2$

$u_1=\frac{1}{4}$

$u_2=\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$

$u_3=\left(\frac{7}{16}\right)^2=u_1\cdot\frac{49}{64}<u_1$

$u_4=\left(1-\left(\frac{7}{16}\right)^2\right)^2=\left(1-\frac{7}{16}\right)^2\left(1+\frac{7}{16}\right)^2=\left(\frac{9}{16}\right)^2\cdot\left(\frac{23}{16}\right)^2=u_2\,\frac{9}{16}\underbrace{\left(\frac{23}{16}\right)^2}_{\approx1{,}2>1}>u_2$



On voit clairement que la toile d'araignée s'éloigne du point (ℓ_-,ℓ_-) au fur et à mesure que $n\to\infty$. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite non plus ds. ce cas.