Université de Cergy-Pontoise - L1 - MPI

Examen de Mathématiques pour les Sciences

Examen du 19 juin 2012 - $2^{\text{ème}}$ session – **Durée : 1h30**

Les documents, les téléphones portables et les calculatrices ne sont pas autorisés

Le barème (4 + 4 + 5 + 7 pts.) est donné à titre indicatif et les exercices sont indépendants

Exercice 1. (4 points) Soit les matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Écrire ${}^tA$, ${}^tB$ (matrices transposées de A, resp. B) et calculer les produits $A \cdot {}^tB$ et ${}^tA \cdot B$.

(b) Calculer les déterminants $\det(A \cdot {}^tB)$ et $\det({}^tA \cdot B)$.

Exercice 2. (4 points)

(a) Donner $DL_4(0)$ (développement limité à l'ordre 4 en zéro) de $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{1-x}$.

(b) Étudier la limite suivante : $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^{-x^2} + x\ln(1+x) - 1}{\sin(x) - x}$.

Exercice 3. (5 points) Dans $\mathbb{R}^3$ muni d'un système cartésien de coordonnées fixé, on se donne un plan $\mathcal{P}$ par l'équation $x + y - z = 1$ et la droite $\mathcal{D}$ qui passe par l'origine et par le point $M(1,1,2)$.

(a) Trouver un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

(b) Trouver des équations cartésiennes définissant $\mathcal{D}$.

(c) Existe-t-il une droite qui soit à la fois normale au plan $\mathcal{P}$ et à la droite $\mathcal{D}$? Justifier.

(d) On note par P la projection du point $M(1,1,2)$ sur le plan $\mathcal{P}$. Quelle est la longueur du segment MP ?

Exercice 4. (7 points) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels vérifiant la relation de récurrence

$$\text{(R)} \quad u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1. **(a)** En supposant que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite l lorsque $n \to \infty$, donner les valeurs possibles pour cette limite. [Indication: on passera à la limite dans (R)].

   (b) Trouver l'expression d'une fonction f telle que l'on puisse écrire $u_{n+1} = f(u_n)$.

   (c) Etudier les variations de la fonction f (notamment les extrema) afin de pouvoir la représenter graphiquement. Calculer $f'(1)$ et représenter sur une même figure le graphe de f et celui de la première bissectrice.

2. Dans la suite on se propose d'étudier le comportement de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, à l'aide de la "toile d'araignée" dans des cas où les conditions initiales sont différentes. Dessiner des figures distinctes pour chacun des cas suivants (en choisissant l'échelle telle que la "toile d'araignée" soit visible). Des explications sont souhaitées, si besoin est.

   (a) Supposons que $u_0 = \frac{1}{2}$. Dessiner la "toile d'araignée" pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire (non-rigoureusement) la nature de la convergence de la suite dans ce cas.

   (b) Supposons que $u_1 = 3$. Pour quelles valeurs de u_0 obtient-on cette situation? Dessiner la "toile d'araignée" et indiquer la nature de la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (c) Soit $u_0 = 1$. Où est la "toile d'araignée" dans ce cas ? Quelle est la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Existe-t-il d'autres valeurs de u_0 pour lesquelles la situation est identique ?