Université de Cergy-Pontoise - L1 - MPI

Examen de Mathématiques pour les Sciences

Examen du 16 janvier 2012 - 1$^{\text{ère}}$ session – **Durée : 2h30**

Les documents, les téléphones portables et les calculatrices ne sont pas autorisés

Le barème (3 + 5 + 4 + 8 pts.) est donné à titre indicatif et les exercices sont indépendants

Exercice 1. (3 points) Soit les matrices: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Écrire la ${}^{t}B$ (matrice transposée de B) et calculer le produit $A \cdot {}^{t}B$.

(b) Calculer le déterminant $\det(A \cdot {}^{t}B)$.

Exercice 2. (5 points)

(a) Donner $DL_4(0)$ (développement limité à l'ordre 4 en zéro) des fonctions suivantes:

$$f(x) = \cos(x^2), \quad g(x) = \sin(x) \cdot \cos(2x)\,.$$

(b) Étudier la limite suivante: $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x}\cos(x) - (2x+1)}{\sin(x) - x(1-x)}$.

Exercice 3. (4 points) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels avec $u_1 = 1/2$ et obéissant à la relation de récurrence $u_{n+1}^2 = u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

(a) En supposant que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente vers une limite l lorsque $n \to \infty$, donner les valeurs possibles pour cette limite. (Indication: on passera à la limite dans la récurrence donnée).

(b) Justifier qu'il existe une fonction f telle que l'on puisse écrire $u_{n+1} = f(u_n)$ et donner l'expression explicite de f.

(c) Dessiner la toile d'araignée pour cette suite.

(d) En déduire (non-rigoureusement) quelle valeur de l parmi celles trouvées à la question (a) ne peut pas être limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 4. (8 points) Dans le plan muni d'un système cartésien de coordonnées fixé, on se donne une droite $\mathcal{D}$ par les équations paramétriques: $x = 4t + 1$, $y = 1 - 2t$, $t \in \mathbb{R}$.

(1.a) Trouver l'équation cartésienne de $\mathcal{D}$ et décider si le point $P(3, 0)$ appartient à $\mathcal{D}$.

(1.b) Donner un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et un vecteur normal à celle-ci.

Soit une paire de points A et B du plan, répéres par les coordonnées $(a, 1)$ et $(2, b)$ respectivement, où a et b sont deux paramètres réels indépendants (donc A court sur la droite d'équation $y = 1$ et B court sur celle d'équation $x = 2$ lorsque a, respectivement b, court sur $\mathbb{R}$).

(2.a) Écrire l'équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}'_{ab}$ contenant les points A et B (en fonction des paramètres $a, b \in \mathbb{R}$).

(2.b) Montrer que les couples de paramètres a, b pour lequels $\mathcal{D}'_{ab}$ est perpendiculaire à $\mathcal{D}$ appartiennent à l'ensemble $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid 2a + b = 5\}$.

(2.c) Pour ces valeurs de a et b, donner les coordonnées du point I d'intersection de ces deux droites et la distance de A à I.

Fixons à présent le point B en (2,2) et notons ce point par B'.

(3.a) Trouver l'aire $\mathscr{A}$ du triangle $\triangle PAB'$ en fonction du paramètre a.

(3.b) Trouver la valeur de a pour laquelle l'aire $\mathscr{A}$ est minimale. Combien vaut-elle dans ce cas ?