CORRIGÉ de L'EXAMEN de MATHS pour SCIENCES

MS-1 $2^{\text{ème}}$ SESSION (2011-2012) 19.06.2012

EXERCICE 1 : $A, B \in \mathcal{M}_{1,3} \Rightarrow {}^tA, {}^tB \in \mathcal{M}_{31}$ et donc

ⓐ $A \cdot {}^tB = (10) \in \mathcal{M}_{1,1}$ et ${}^tA \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{33}$

ⓑ $\det(A\,{}^tB) = 10$; $\det({}^tA \cdot B) = 0$ car il y a au moins 2 lignes qui sont proportionnelles.

EXERCICE 2 ⓐ $\begin{cases} \cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x) \\ (1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^4\varepsilon(x) \end{cases}$

d'où : $\dfrac{\cos x}{1-x} = (1 + \dots + x^4) + \left(-\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{2} - \dfrac{x^4}{2}\right) + \dfrac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x)$

donc $\boxed{\dfrac{\cos x}{1-x} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{13}{24}x^4 + x^4\varepsilon(x),\ \varepsilon(x) \to 0}$

ⓑ $\sin x - x = \cancel{x} - \dfrac{x^3}{3!} + x^4\varepsilon(x) - \cancel{x} = -\dfrac{x^3}{3!} + x^4\varepsilon(x)$

$e^{-x^2} = 1 + (-x^2) + \dfrac{(-x^2)^2}{2!} + x^5\varepsilon(x)$

$x\ln(1+x) = x\left(x - \dfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)\right) = x^2 - \dfrac{x^3}{2} + x^3\varepsilon(x)$

d'où :

$$\frac{e^{-x^2} + x\ln(x+1) - 1}{\sin x - x} = \frac{\left(\cancel{1} - \cancel{x^2} + \dfrac{x^4}{2}\right) + \left(\cancel{x^2} - \dfrac{x^3}{2}\right) - \cancel{1} + x^3\varepsilon(x)}{-\dfrac{x^3}{3!} + x^4\varepsilon(x)}$$

$$= \frac{-x^3/2 + x^3\varepsilon(x)}{-x^3/3! + x^4\varepsilon(x)} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1}{2} \cdot 3! = 3.$$

EXERCICE 3 : ⓐ Vect dir. pour $\mathcal{D}$: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

ⓑ <u>Obs</u> : $\mathcal{D}$ est intersection de tous deux plans $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ non-confondus qui contiennent l'origine et $M(1,1,2)$. Une eq. de chaque de ces plans forme <u>LES</u> eq. qui définissent $\mathcal{D}$.

Pour trouver de tels plans $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ (qui, dans notre cas passent par $O(0,0,0)$) il suffit de trouver des vect. normaux à eux, $\vec{n}_1$ resp. $\vec{n}_2$ car ayant un point leur appartenant, par ex $O(0,0,0)$ l'eq. de $\mathcal{P}_i$ $(i=1,2)$ s'écrit (si $\vec{n}_i = \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{pmatrix}$) : $a_i(x-0) + b_i(y-0) + c_i(z-0) = 0$

Il suffit de trouver $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$, qui doivent par ailleurs être normaux à $\mathcal{D}$ (puisque $\mathcal{D} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$). Ceci s'écrit : $\vec{u} \cdot \vec{n}_i = 0$ $(i = 1,2)$ i.e. $a_i + b_i + 2c_i = 0$.

Choisissons alors $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (ils vérifient l'eq. ci-dessus) et on déduit un syst. d'eq. qui définit $\mathcal{D}$: $\begin{cases} x + y - z = 0 & (1) \\ -x + y = 0 & (2) \end{cases}$

(Vérification : on résoud le syst. en posant $\lambda \equiv z$ paramètre et on obtient : $\mathcal{D} = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$)

ⓒ Ceci ne peut arriver que ssi $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont parallèles. Or, <u>c'est le cas</u>, car si $I(x,y,z)$ était intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ (point unique, car $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ est exclus car $O \notin \mathcal{P}$ mais $O \in \mathcal{D}$) alors le syst. d'eq. de $\mathcal{D}$ <u>et</u> $\mathcal{P}$ aurait sol. unique. Or l'eq. (1) de $\mathcal{D}$ et l'éq. de $\mathcal{P}$ sont incompatibles.

<u>AUTREMENT</u> : on trouve un vect. normal à $\mathcal{P}$ et on montre que il est $\perp \vec{u}$.

ⓓ Cf. Thm. du cours, pour le plan d'equation $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ et pour $M(x_0, y_0, z_0)$ on a :

$\text{dist}(M,P) = \left| \dfrac{\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 + \delta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} \right|$ (où P = pt. proj. orth. de M sur $\mathcal{P}$)

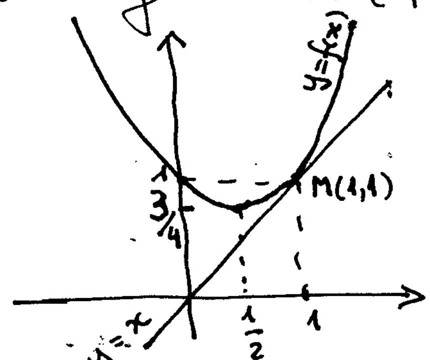
Ici $\begin{cases} x_0 = y_0 = 1, z_0 = 2 \\ \alpha = \beta = 1, \gamma = \delta = -1 \end{cases}$ donc $\boxed{\text{dist}(M,P) = 1/\sqrt{3}}$

EXERCICE 4 :

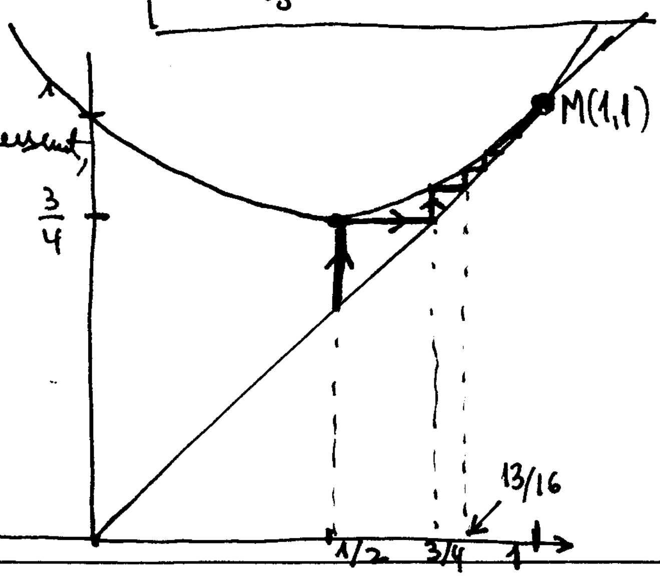
1.a $\lim_{n\to\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to\infty} u_n = \ell$ si celle-ci existe. Alors en passant à $\lim_{n\to\infty}$ ds. (R) on a : $(\ell-1)^2 = 0 \Rightarrow \ell = 1$ (racine double.)

1.b $f(x) = x^2 - x + 1$ qui a des racines purement complexes $x_\pm = \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$.

1.c $f'(x) = 2x - 1 \Rightarrow (f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2})$ et $f''(\frac{1}{2}) = 2 > 0$ donc f admet un min en $1/2$ et $f(1/2) = \frac{3}{4}$.
Aussi, $f(0) = f(1) = 1$ et $f'(1) = 1$ donc la première bissectrice est tangente en $M(1,1)$ au graphe de f.

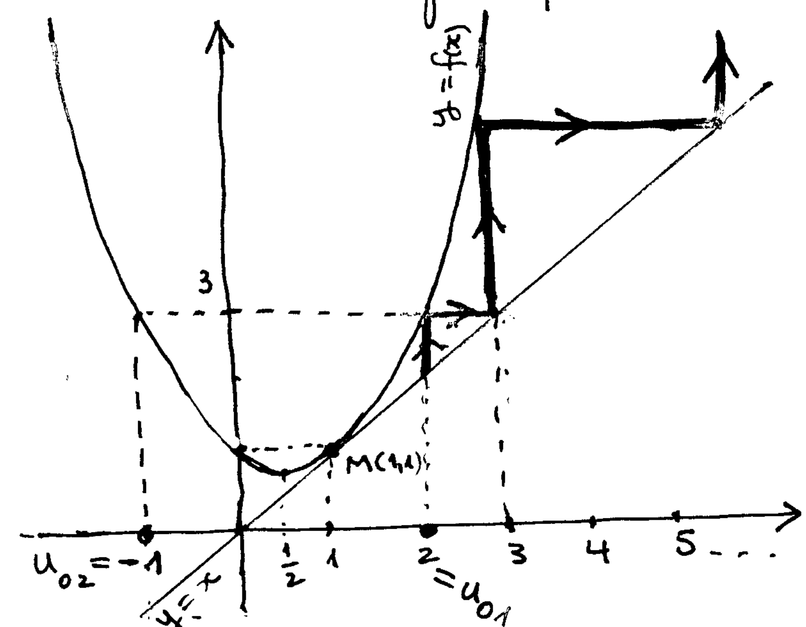


2.a $\boxed{u_0 = \frac{1}{2}}$ d'où par (R) :
$u_1 = \frac{3}{4}$, $u_2 = \frac{13}{16}$, ...
et on a :
$\frac{1}{2} < \frac{3}{4} < \frac{13}{16} < \ldots < 1$



Donc, non-rigoureusement,
$u_n \to \ell = 1$
quand $n \to \infty$
et $u_0 = \frac{1}{2}$

2b $\boxed{u_1 = 3} \overset{(R)}{\Longrightarrow} 3 = u_0^2 - u_0 + 1 \Leftrightarrow (u_0 - 2)(u_0 + 1) = 0$
Donc $u_0 = 2$ et $u_0 = -1$ mènent à une même situation : $u_1 = 3$ et donc on aura une seule (et même) toile d'araignée pour ces deux u_0 :



Donc dans ce cas la toile d'araignée suggère que $\lim_{n\to\infty} u_n = \infty$.

2.c $\boxed{u_0 = 1} \overset{(R)}{\Longrightarrow} u_1 = u_2 = \ldots = u_n = \ldots = 1$ car 1 est point fixe de f. Donc dans ce cas la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et la toile d'araignée se concentre en un seul point : $M(1,1)$ et là on peut affirmer : $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$ (rigoureusement).
Comme $f(0) = f(1) = 1$, il suit que $u_0 = 0$ produit la même situation, i.e. une suite cte $= 1$ à partir de $u_1 = 1$ et la toile d'araignée est le segment PM où $P(0,1)$.