CORRIGÉ de L'EXAMEN de MATHS pour SCIENCES
SESSION 1 – 16 JANVIER 2012 (MPI – L1)

EXERCICE 1 : (a) $^{t}B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ d'où :

$$A\cdot{}^{t}B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot0+1\cdot(-1)+3\cdot3 & 3\cdot1+1\cdot(-2)+3\cdot3 \\ 2\cdot0+1\cdot(-1)+2\cdot3 & 2\cdot1+1\cdot(-2)+2\cdot3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

(b) $$\det(A\cdot{}^{t}B) = \begin{vmatrix} 8 & 10 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2(24-25)$$
$$= -2.$$

EXERCICE 2 (a) $\cos(x^2) \underset{x\approx 0}{=} 1 - \frac{(x^2)^2}{2!} + x^5\varepsilon(x) = \underbrace{1 - \frac{x^4}{2} + x^5\varepsilon(x)}$
avec $\varepsilon(x) \to 0,\ x \to 0$

$$\sin x \cos(2x) \underset{x\approx 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)\left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + o(x^3)\right) =$$
$$= x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) - 2x^3 = \underline{x - \frac{13}{6}x^3 + o(x^4)}$$

(b) $\dfrac{e^{2x}\cos(x) - (2x+1)}{\sin(x) - x(1-x)} \underset{(\text{DL en zéro})}{=}$

$$= \frac{\left(1+2x+\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^3}{3!}+o(x^3)\right)\left(1-\frac{x^2}{2!}+o(x^3)\right) - (2x+1)}{\cancel{x} - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) - \cancel{x} + x^2}$$

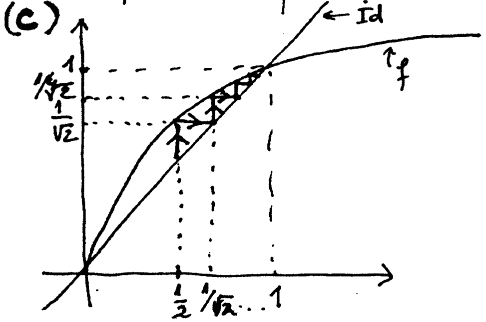
$$= \frac{\cancel{1+2x} + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3) - \frac{x^2}{2} - x^3 + o(x^3) - \cancel{(1+2x)}}{x^2\left(1 - \frac{x}{6} + o(x^2)\right)}$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{\cancel{x^2}\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{3}x + o(x)\right)}{\cancel{x^2}\left(1 - \frac{x}{6} + o(x^2)\right)} = \frac{3}{2}.$$

EXERCICE 3 : (a) Si $\exists \lim_{n\to\infty} u_n \equiv l$ alors la relation de recurrence donne (thm. connus) : $l^2 = l$ d'ou $l=0$ ou $l=1$

(b) $u_{n+1}^2 = u_n\ \forall n$ montre qu'on a $u_n \geq 0\ \forall n$ donc on peut extraire la racine carrée et obtenir $u_{n+1} = \sqrt{u_n}\ \forall n$ d'où f est la fonction racine carrée : $[0,\infty[\to [0,\infty[$.

(c)



(d) On voit sur la toile d'araignée que les u_n avec n grand sont de plus en proches de 1 donc la toile d'araigude suggère que la limite à exclure est 0.

EXERCICE 4 : (1.a) On élimine le paramètre t des équations paramétriques de $\mathcal{D}$ et on a : $x + 2y - 3 = 0$. (*)
$P(3,0) \in \mathcal{D}$ car $3 + 2\cdot0 - 3 = 0$.

(1.b) Pour une droite (d) donnée par $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, un vect. directeur de (d) est $\vec{u} = \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix}$ et un vect. normal à (d) est $\vec{n} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ (Obs : $\vec{u}\cdot\vec{n} = 0$). Dans notre cas $\vec{u}_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(2) Il faut dès le début faire l'observation que pour le cas où A et B coincident on a une infinité de droites possibles. On élimine donc de cas en demandant $(a,b) \neq (2,1)$. Alors :

(2.a) Etant donnés 2 pts. $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ l'équation cartesienne d'une droite les reliant est :
$(y_B - y_A)(x - x_A) - (x_B - x_A)(y - y_A) = 0$.
Pour le cas $A(a,1)$ et $B(2,b)$ celle-ci devient :
$$(1-b)x + (2-a)y + (ab-2) = 0 \quad (**)$$

(2.b) De l'éq. ci-dessus on déduit un vecteur directeur $\vec{u}_{\mathcal{D}'_{ab}} = \begin{pmatrix} a-2 \\ 1-b \end{pmatrix}$ à qui on demande : $\vec{u}_{\mathcal{D}}\cdot\vec{u}_{\mathcal{D}'_{ab}} = 0$

qui équivaut à $(a-2)\cdot(-2)+(1-b)\cdot 1=0 \Leftrightarrow \underline{2a+b-5=0}$ qu'on remplace dans $(**)$ et on obtient l'éq. des $\mathcal{D}^{\perp}_{a,b}$, droites passant par A et B et orthogonales à $\mathcal{D}$:

$$[2x-y+(1-2a)](a-2)=0.$$

- Le cas $a=2$ (et $b\neq 1$) peut être étudié séparément il donne $\vec{u}_{\mathcal{D}'_{ab}}=\begin{pmatrix}0\\1-b\end{pmatrix} \not\perp \vec{u}_{\mathcal{D}}$ $\forall b\neq 1$, donc ce cas est à éliminer.

- Pour $a\neq 2$ on obtient les eq. des droites $\mathcal{D}'\perp\mathcal{D}$:

$$2x-y+(1-2a)=0 \quad \binom{*}{**}$$

(2.c) $I := \mathcal{D}'\cap\mathcal{D}$ (où $\mathcal{D}'$ sont les $\mathcal{D}'_{ab}\perp\mathcal{D}$).

Alors $I=I(x,y)$ où $\begin{cases}2x-y+(1-2a)=0\\ x+2y-3=0\end{cases}$

Système linéaire de déterminant $=\begin{vmatrix}2&-1\\1&2\end{vmatrix}=5\neq 0$ donc système de Cramer (sol. unique) :

$$x_I=\frac{\begin{vmatrix}2a-1&-1\\3&2\end{vmatrix}}{5}=\frac{4a+1}{5} \quad\text{et}\quad y_I=\frac{\begin{vmatrix}2&2a-1\\1&3\end{vmatrix}}{5}=\frac{7-2a}{5}$$

Aussi, $\operatorname{dist}(A,I)=\sqrt{(x_A-x_I)^2+(y_A-y_I)^2}=$

$$=\sqrt{\left(a-\frac{4a+1}{5}\right)^2+\left(1-\frac{7-2a}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{(a-1)^2}{25}+\frac{4(a-1)^2}{25}}=\frac{|a-1|}{\sqrt5}.$$

Obs : On aurait pu, alternativement, choisir un point $C\in\mathcal{D}$ (par ex. $C(1,1)$, mais le $P(0,3)$ de la question (1) convient également) et appliquer la formule (voir CM) de la proj. orth. :

$$\vec{CI}=\frac{\vec u}{|\vec u|}\left(\vec{CA}\cdot\frac{\vec u}{|\vec u|}\right)$$

et aussi

$$\operatorname{dist}(A,\mathcal{D})=\operatorname{dist}(A,I)=\sqrt{|\vec{CA}|^2-|\vec{CI}|^2}.$$

(3.a) $\mathcal{A}_{\Delta PAB}=\frac12\|\vec{PA}\wedge\vec{PB}\|=\frac12\left|\det\begin{pmatrix}x_A-x_P & x_B-x_P\\ y_A-y_P & y_B-y_P\end{pmatrix}\right|$

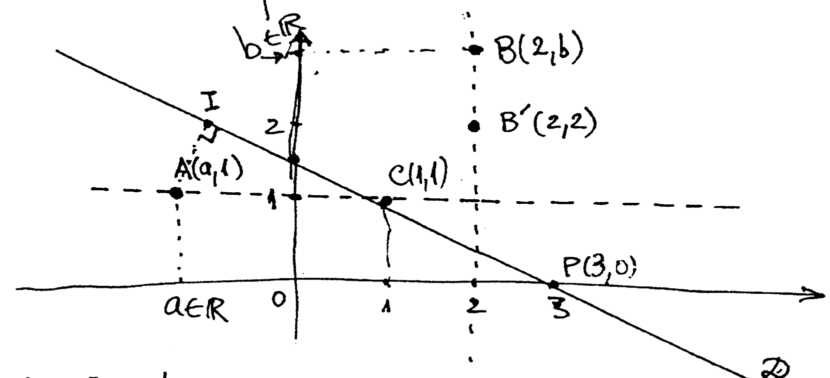
$$=\frac12\left|\det\begin{pmatrix}a-3&2-3\\1-0&2-0\end{pmatrix}\right|=\frac12|2a-5|$$

Obs : Une autre formule pouvait être utilisée, à savoir

$$\mathcal{A}=\frac12\left|\det\begin{pmatrix}x_A&x_B&x_P\\y_A&y_B&y_P\\1&1&1\end{pmatrix}\right|.$$

Elle donne le m. résultat (vérifiez-le !)

On peut aussi calculer la projection de A sur la droite contenant les points (fixes) B et P et utiliser la formule usuelle de l'aire du triangle.



(3.b) L'aire est minimale lorsque $\mathcal{A}=0$ dans notre cas, à savoir lorsque $a=5/2$. C'est la valeur pour laquelle les points A, P et B' sont alignés (voir figure)