

Examen de Mathématiques pour les Sciences

Examen du 14 juin 2010 - 2^{ème} session

Durée : 1h30

Les documents, les téléphones portables et les calculatrices ne sont pas autorisés

Le barème est donné à titre indicatif

Exercice 1. (4 points) Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. (4 points)

(a) Donner $DL_4(0)$ (développement limité à l'ordre 4 en zéro) des fonctions suivantes:

$$f(x) = \cos^2(x), \quad g(x) = \sin(2x) \cdot \cos(x).$$

(b) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \cos(2x) - (x + 1)}{\cos(x) - 1}.$$

Exercice 3. (4 points) Soient

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Parmi les produits matriciels suivants calculer ceux qui sont bien définis:

$$A \cdot {}^t A, \quad A \cdot B, \quad {}^t A \cdot B, \quad B^2 \quad \text{et} \quad (A \cdot {}^t A \cdot B) \cdot (B \cdot A \cdot {}^t A), \quad \text{où } {}^t A \text{ dénote la matrice transposée de } A.$$

Exercice 4. (4 points) Trouver la projection orthogonale du point $P = (4; 5) \in \mathbb{R}^2$ sur la droite ℓ donnée par sa représentation paramétrique :

$$x = 4t + 1, \quad y = 1 - 2t, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Faire un dessin et déterminer aussi la distance entre P et ℓ .

Exercice 5. (4 points) Montrer que

$$\sum_{k=1}^n (k^2 + 1) = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{7n}{6}. \quad (2)$$

Indication: Utiliser le principe de récurrence.