

1. Calculer $\sum_{k=1001}^{2000} \frac{k}{1000}$.
2. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite récurrente définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{2}{u_n}$, $n \geq 0$.
 - (a) Donner les valeurs de u_1 et u_2 .
 - (b) Pour $x > 0$ étudier la variation de $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$. Esquisser son graphe et indiquer le point minimal.
 - (c) Dessiner la *toile d'araignée* associée à la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.
 - (d) Montrer que si $x \geq 2$ alors $0 \leq f(x) - f(2) \leq \frac{1}{2}(x - 2)$.
 - (e) Que peut-on conclure sur $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$? (justifier).
3. Dans l'espace muni d'un repère cartésien, on considère le plan qui passe par $A(0; 0; 1); B(0; 1; 0); C(1; 1; 0)$.
 - (a) Déterminer un vecteur normal au plan.
 - (b) Déterminer une équation du plan
 - (c) Déterminer la distance entre le plan et le point $D(1; 1; 1)$.
4. Soient $x = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ et $M = {}^t x x$, où ${}^t x \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est la matrice transposée de x .
 - (a) Quelle est la taille de la matrice $M = {}^t x x$?
 - (b) Calculer les produits matricielles : $x {}^t x$, $x M {}^t x$, $x M M {}^t x$.
(Indication : On pourra utiliser l'associativité du produit matriciel).
 - (c) Déterminer pour tout $n \geq 0$ une formule simple pour le produit $x (M)^n {}^t x$.
5. Soit $B = \begin{pmatrix} -9 & -18 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres associés à la matrice B .
6. (a) Donner un DL₆(0) des deux fonctions : $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin(x^2)$.
(b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x^2)}{\sin(x^2)}$ ainsi que $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \frac{\cos^2(x) + \sin(x^2) - 1}{\sin(x^2) - x^2}$.
7. Trouver la solution générale de $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2}y = 0$ et ensuite de $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2}y + x^2 = 0$.