Mathématiques pour les Sciences (L1-S1-MPI)

Corrigé de l'examen du 14 juin 2010 - SESSION 2

Solution de l'exercice 1. A l'aide du polynôme caractéristique : $\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -4-\lambda & 3 \\ -2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$ $= \lambda^2 + 3\lambda + 2$. on trouve deux racines distinctes : $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$. On calcule des noyaux et trouve des vecteurs propres $v_1 = (1,1)$ et $v_2 = (3,2)$ (ou des vecteurs proportionnels à ceux-ci). $\square$

Solution de l'exercice 2. **(a)** On a à l'ordre 4 :

$$f(x) = (1 - x^2/2 + x^4/24 + o(x^4))^2 = 1 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 + o(x^4),$$
$$g(x) = (2x - 8x^3/6 + o(x^5))(1 - x^2/2 + o(x^3)) = 2x - \frac{7}{3}x^3 + o(x^4).,$$

(b) En utilisant des développements limités, on obtient

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} x^{-3}\Big(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) - x\Big) = -\frac{1}{6}\,,$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \cos(2x) - (x+1)}{\cos(x) - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(1 - (2x)^2/2 + o(x^3)\right) - 1 - x}{1 - x^2/2 + o(x^2) - 1}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2x^2 + x^2/2}{-x^2/2} = 3\,.$$

$\square$

Solution de l'exercice 3. :
Pour que l'on puisse multiplier 2 matrices, le nombre de colonnes de celle de gauche doit être égal à celui des lignes de celle de droite. Ce n'est pas le cas de $A \cdot B$, donc produit impossible. Pour les autres, on a :

$$A \cdot {}^{\mathbf{t}}\!A = \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}\ ,\ {}^{\mathbf{t}}\!A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\text{d'où}\quad (A \cdot {}^{\mathbf{t}}\!A \cdot B)(B \cdot A \cdot {}^{\mathbf{t}}\!A) = A \cdot {}^{\mathbf{t}}\!A \cdot (B^2) \cdot A \cdot {}^{\mathbf{t}}\!A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\square$

Solution de l'exercice 4. $\vec{n} = (2,4)$ est un vecteur normal à la droite. $M = (1;1)$ appartient à la droite. Soit Q la projection en question. Alors

$$\overrightarrow{QP} = \vec{n}\,\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{MP}}{\vec{n}\cdot\vec{n}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \frac{(2,4)\cdot(4-1,5-1)}{(2,4)\cdot(2,4)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \frac{22}{20} = \begin{pmatrix} 2.2 \\ 4.4 \end{pmatrix}$$

d'où $Q = (-2.2; 5 - 4.4) = (1.8; 0.6)$. La distance est $|\overrightarrow{QP}| = \sqrt{20}\,\frac{11}{10}$. $\square$

Solution de l'exercice 5. On note (P_n) la propriété que la formule donnée soit vraie. Nous allons établir (P_n) par récurrence. Pour $n = 1$, on a bien que $\sum_{k=1}^{1}(k^2+1) = (1+1) = 2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{7}{6} = \frac{2+3+7}{6}$. Supposons que (P_{n-1}) est vraie pour $n \geq 2$. Alors

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2+1) = \sum_{k=1}^{n-1}(k^2+1) + n^2 + 1 = \frac{(n-1)^3}{3} + \frac{(n-1)^2}{2} + \frac{7(n-1)}{6} + n^2 + 1$$
$$= \frac{n^3 - 3n^2 + 3n - 1}{3} + \frac{n^2 - 2n + 1}{2} + \frac{7(n-1)}{6} + n^2 + 1 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{7n}{6}.$$

Par le principe de récurrence, la propriété (P_n) est démontrée.

$\square$