1. Calculer $\sum_{k=1001}^{2000} \dfrac{k}{1000}$. **[2 pts]**

   [1pt] Notons S_n la somme $\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)/2$.

   [1pt] Alors $\sum_{k=1001}^{2000} \dfrac{k}{1000} = \dfrac{S_{2000} - S_{1000}}{1000} = \dfrac{2000 \cdot 2001 - 1000 \cdot 1001}{2 \cdot 1000} = \dfrac{4002 - 1001}{2} = 1500.5$.

2. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite récurrente définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{2}{u_n}$, $n \geq 0$. **[5 pts]**

   (a) Donner les valeurs de u_1 et u_2.

   (b) Pour $x > 0$ étudier la variation de $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x}$. Esquisser son graphe et indiquer le point minimal.

   (c) Dessiner la *toile d'araignée* associée a la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.

   (d) Montrer que si $x \geq 2$ alors $0 \leq f(x) - f(2) \leq \dfrac{1}{2}(x-2)$.

   (e) Que peut-on conclure sur $\lim_{n\to\infty} u_n$? (justifier).

   (a) **[1 pt]** De $u_0 = 1$ on trouve $u_1 = 1/2 + 2/1 = 2.5$ (0.5pt) et $u_2 = 2.5/2 + 2/2.5 = 2.05$ (0.5pt).

   (b) **[1pt]** On a $f'(x) = 1/2 - 2/x^2$. $f' > 0$ pour $0 < x < 2$ et $f' < 0$ pour $2 < x < \infty$. $f'(2) = 0$. (Eventuellement un tableau de variation comme en terminale peut aider, mais il n'est pas nécessaire). Point minimal $(2, f(2)) = (2, 2)$.

   (c) **[1pt]** (voir figure)

   (d) **[1pt]** Si $x \geq 2$ on a $f(x) - f(2) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x} - 2 = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{2x} = \dfrac{(x-2)^2}{2x}$.
   D'où $f(x) - f(2) \geq 0$ et $f(x) - f(2) \leq \dfrac{x-2}{2}\dfrac{x-2}{x} \leq \dfrac{x-2}{2}$ (car $x \geq 2$).

   (e) **[1pt]** On a $0 \leq |u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 1| \leq \cdots \leq (\frac{1}{2})^n |u_1 - 2| = \frac{1}{2}^{n+1}$ qui tends vers zero. D'où $\lim_{n\to\infty} u_n = 2$. (0.5pt pour trouver la limite sans démo. 0.5pt pour la rigueur).

3. Dans l'espace muni d'un repère cartésien, on considère le plan qui passe par $A(0;0;1)$; $B(0;1;0)$; $C(1;1;0)$. **[3 pts]**

   (a) Déterminer un vecteur normal au plan.

   (b) Déterminer une équation du plan

   (c) Déterminer la distance entre le plan et le point $D(1;1;1)$.

   (a) **[1pt]** On peut par exemple calculer le produit vectoriel de $\overrightarrow{BA} = (0, -1, 1)$ et $\overrightarrow{BC} = (1, 0, 0)$. On aura $\vec{n} = (0, 1, 1)$ (ou un vecteur parallel à ceci), (une méthode correcte 0.5 pt, resultat 0.5 pt).

   (b) **[1pt]** Utilisant par ex que le plan passe par A on a $0(x-0)+1(y-0)+1(z-1) = 0$ où bien $y+z-1 = 0$. (méthode 0.5pt, resultat 0.5pt).

   (c) **[1pt]** Formule du cours avec $D(1;1;1) = D(x_0; y_0; z_0)$ et $\vec{n} = (0,1,1) = (a,b,c)$:
   distance $= \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \dfrac{|0+1+1-1|}{\sqrt{0+1+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. (méthode 0.5pt, resultat 0.5pt).

4. Soient $x = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ et $M = {}^{\mathbf{t}}x\ x$, où ${}^{\mathbf{t}}x \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est la matrice transposée de x. **[3 pts]**
   (a) Quelle est la taille de la matrice $M = {}^{\mathbf{t}}x\ x$?
   (b) Calculer les produits matricielles : $x\ {}^{\mathbf{t}}x$, $x\ M\ {}^{\mathbf{t}}x$, $x\ M\ M\ {}^{\mathbf{t}}x$.
   (Indication : On pourra utiliser l'associativité du produit matriciel).
   (c) Déterminer pour tout $n \geq 0$ une formule simple pour le produit $x\ (M)^n\ {}^{\mathbf{t}}x$.

   (a) **[0.5pt]** $\mathcal{M}_{3.1} \times \mathcal{M}_{1,3} = \mathcal{M}_{3,3}$. La taille est 3×3.
   (b) **[1.5pt]** $x\ {}^{\mathbf{t}}x = 2^2 + (-2)^2 + 1 = 9$, ensuite $x\ M\ {}^{\mathbf{t}}x = (x\ {}^{\mathbf{t}}x)^2 = 9^2 = 81$ et $xMM\ {}^{\mathbf{t}}x = (x\ {}^{\mathbf{t}}x)^3 = 9^3 = 729$ (0.5pt par resultat).
   (c) **[1pt]** En général $x(M^n)\,{}^{\mathbf{t}}x = (x\,{}^{\mathbf{t}}x)^{n+1} = 9^{n+1}$. (une méthode correcte 0.5pt, resultat (en particulier le $n+1$ dans la formule) 0.5pt).

5. Soit $B = \begin{pmatrix} -9 & -18 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres associés à B. **[4 pts]**

   $\det(B - \lambda\mathbf{1}) = (-9-\lambda)(12-\lambda) - 6(-18) = \lambda^2 - 3\lambda = 0$ donne valeurs propres $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = 0$. (1+1 pts)

   $(B - \lambda_i\mathbf{1})v_i = \overrightarrow{0}$ donne $v_1 = (3,-2)$ et $v_2 = (2,-1)$ (ou tous vecteurs proportionels à ceux-ci, i.e. tout multiples scalaires de ceux-ci)). (1+1 pts)

6. (a) Donner un $\mathrm{DL}_{\mathbf{6}}(0)$ des deux fonctions : $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin(x^2)$. **[4 pts]**
   (b) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^2)}{\sin(x^2)}$ ainsi que $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^2\ \frac{\cos^2(x) + \sin(x^2) - 1}{\sin(x^2) - x^2}$.

   (a) **[1+1 pts]** $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6)$ et $\sin(x^2) = (x^2) - \frac{(x^2)^3}{3!} + o((x^2)^3) = x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6)$. (1pt chacun).
   (b) **[1+1 pts]** $\dfrac{1-\cos(x^2)}{\sin(x^2)} = \dfrac{1-(1-x^2/2+o(x^2))}{x^2+o(x^2)} = \dfrac{x^2/2+o(x^2))}{x^2+o(x^2)} = 1/2 + o(x^0) \to 1/2,\ x \to 0$

   $$\frac{\cos^2(x)+\sin(x^2)-1}{\sin(x^2)/x^2 - 1} = \frac{(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24})^2 + x^2 - 1 + o(x^4)}{x^4/6 + o(x^4)} = \frac{\frac{x^4}{4}+\frac{x^4}{12}+o(x^4)}{x^4/6+o(x^4)} \to -2,\ x \to 0$$

   Remarque : Les petits 'o' comptent au maximum pour 1.5 pts. Donc, si tout est correct mais aucune référence aux petits 'o' n'est faite, l'étudiant aura 2.5 points. Déduction de points en fonction de la gravité des erreurs.

7. Trouver la solution générale de $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{1}{2}y = 0$ et ensuite de $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{1}{2}y + x^2 = 0$. **[3 pts]**

   Cas homogène : $y(x) = \lambda \exp\big(-\int_0^x(-\frac{1}{2})\mathrm{d}t\big) = \lambda\exp(x/2)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ quelconque. (1.5 pts, dont 0.5 pour la constante)

   Cas inhomogène : Pour trouver une solution particulière, soit on applique la variation de la constante (donner bonus si bien faite) soit, sachant que le membre de droite est $-x^2$, donc un polynôme de degré 2, on essaye de la trouver sous la forme d'un polynôme du même degré : $ax^2 + bx + c$. On trouve finalement $y(x) = 2x^2 + 8x + 16$ (1 pt). La solution générale sera donc : $y(x) = 2x^2 + 8x + 16 + \lambda\exp(x/2)$, $\forall\lambda \in \mathbb{R}$. (0.5 pt)