

Mathématiques pour les Sciences (MS1)

Examen du 8 janvier 2009 (1^{ère} session), durée : 2,5 heures

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1. [2 points] Déterminer $\sum_{k=1}^{100} (5k + 2)$.

Exercice 2. [5 points] Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 5u_n - 6}{6}$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4 (comme fractions réduites).
2. Dessiner la toile d'araignée associée à la suite.
3. En supposant que la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ existe, trouver-la (sans rigueur, à l'aide de votre dessin ou par une autre méthode).
4. Problème (plus difficile): Retrouver rigoureusement votre réponse de la question précédente.

Exercice 3. [3 points] Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer par récurrence que

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. [4 points] Soit $\ell(a)$ la droite dans le plan donnée par sa représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = at + 1 \\ y = (6 - a^2)t + 2 \end{cases}$$

1. Déterminer la distance entre l'origine et $\ell(a)$.
2. Trouver la projection de l'origine sur la droite $\ell(a)$.
3. Pour quelle(s) valeur(s) de a , la droite $\ell(a)$ est-elle perpendiculaire au vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$?

Exercice 5. [4 points]

(a) Donner un $DL_4(0)$ des fonctions suivantes: $f_1(x) = \exp(2x)$ et $f_2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$.

(b) Calculer les limites suivantes (où $a, b \in \mathbb{R}$ sont des paramètres):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2(ax) - \cos^2(bx)}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x^2)}{x^2 - \sin^2 x}.$$

Exercice 6. [3 points] Trouver la solution générale de $\frac{dy}{dx} + y = 3 \exp(2x)$.