Mathématiques pour les Sciences (MS1)

Corrigé de l'Examen du 8 janvier 2008

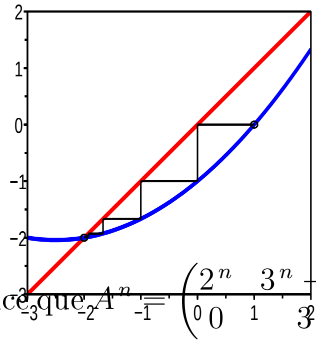
Exercice 1 (2 points) Déterminer $\sum_{k=1}^{100}(5k+2)$.

[1 pt] : Notons S_n la somme $\sum_{k=1}^{n} k$. Elle vaut $\dfrac{n(n+1)}{2}$.
[Rappel : on additionne terme à terme $S_n = 1+2+\ldots+(n-1)+n$ à $S_n = n+(n-1)+\ldots+2+1$.]
[1 pt] : D'où, pour $n = 100$ on obtient : $\sum_{k=1}^{100}(5k+2) = 5 \cdot \frac{100\cdot 101}{2} + 2 \cdot 100 = 25450$.

Exercice 2 (6 points) Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 5u_n - 6}{6}$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4 (comme fractions réduites).
2. Dessiner la toile d'araignée associée à la suite.
3. En supposant que la limite $\lim_{n\to\infty} u_n$ existe, trouver-la (sans rigueur, à l'aide de votre dessin ou par une autre méthode).
4. Problème (plus difficile) : Retrouver rigoureusement votre réponse de la question précédente.

1. **[1.5 pt]** : De $u_0 = 1$ on déduit $u_1 = 0$,$u_2 = -1$ (0.5 pt), $u_3 = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3}$ (0.5pt) et $u_4 = -\frac{52}{27}$ (0.5 pt).
2. **[1.5 pt]** : Figure. NB : (u_0, u_1), (u_1, u_2),.. sont sur le graphe de f !
3. **[1.5 pt]** : Notons $u = \lim_{n\to\infty} u_n$ et $f(x) = \frac{x^2+5x-6}{6}$. Comme f est continue, par passage à la limite dans la récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient que u est un point fixe de f, donc $u = \frac{u^2+5u-6}{6} \Leftrightarrow u^2 - u - 6 = 0 \Leftrightarrow (u-3)(u+2) = 0 \Leftrightarrow u = 3$ ou $u = -2$. Du dessin on voit que $u < 0$ et donc $u = -2$.
4. **[1.5 pt]** : $f(u)-(-2) = f(u)+2 = (u+2)\frac{u+3}{6} = (u-(-2))\frac{u+3}{6}$. Par ailleurs, $|u+2| \leq 1 \Leftrightarrow u \in I = [-3,-1] \Leftrightarrow 0 \leq u+3 \leq 2$. Donc si $u \in I = [-3,-1]$ on a $|f(u)+2| \leq |u+2|\frac{2}{6}$ et $f(I) \subset I$ (contraction Lipschitzienne). Or $u_2 = -1 \in I$, d'où, par un Théorème du cours, $u_n \in I$ pour tout entier $n \geq 2$ et la suite converge vers $u = -2$.



Exercice 3 (3 points) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer par récurrence que $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

On note M_n la matrice du membre de droite. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons par $\mathcal{P}_n$ la proposition $A^n = M_n$.

[1 pt] : $\mathcal{P}_1$ est vraie (par calcul quand $n = 1$)
[2 pt] : Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie pour un $n \geq 1$ entier fixé arbitrairement. Alors

$$A^{n+1} = A \cdot A^n = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 2(3^n - 2^n) + 3^n \\ 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 3^{n+1} - 2^{n+1} \\ 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Donc $P_n \Rightarrow P_{n+1}$. Par récurrence, P_n est donc vraie pour tout entier $n \geq 1$.

[Dans l'énoncé on ne précise pas si $n \in \mathbb{N}$ ou $n \in \mathbb{Z}$. On devrait donc se poser la question pour les n entiers négatifs et remarquer que la relation est vraie pour tout $n \in \mathbb{Z}$, (avec la convention A^0= matrice unité 2×2) ; par exemple, vérifier que $A^{-1} = M_{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/6 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$ etc. Une telle remarque, avec démonstration, pourrait être remunerée jusqu'à 2 points supplementaires].

Exercice 4 [4.5 points] $\ell(a)$ la droite donnée par sa repr. paramétrique $\begin{cases} x = at + 1 \\ y = (6-a^2)\,t + 2 \end{cases}$

1. Déterminer la distance entre l'origine et $\ell(a)$.
2. Trouver la projection de l'origine sur la droite $\ell(a)$.
3. Pour quelle(s) valeur(s) de a, la droite $\ell(a)$ est-elle perpendiculaire au vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$?

1. **[1.5 pt]**: On pourrait par exemple déterminer d'abord l'équation de la droite : $(6-a^2)x - ay + (2a + a^2 - 6) = 0$. Par un Théorème du cours on trouve alors :
$$d(\mathcal{O}, \ell(a)) = \frac{|(6-a^2)\cdot 0 + (-a)\cdot 0 + (2a+a^2-6)|}{\sqrt{(6-a^2)^2+a^2}} = \frac{|a^2+2a-6)|}{\sqrt{a^4-11a^2+36}}.$$
2. **[1.5 pt]**: Cherchons $t \in \mathbb{R}$ t.q. $\begin{pmatrix} at+1 \\ (6-a^2)t+2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} a \\ 6-a^2 \end{pmatrix}$ (vecteur directeur). D'où $(at+1)a + ((6-a^2)t+2)(6-a^2) = 0$ donne $t = \dfrac{2a^2-a-12}{a^4-11a^2+36}$. Donc les coordonnées de la projection de l'origine sur la droite $\ell(a)$ sont $x = at+1$ et $y = (6-a^2)t+2$ (on n'est pas obligé d'écrire ceci en fraction rationnelle).
3. **[1.5 pt]**: Il faut que $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} a \\ 6-a^2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 0 = a + (-1)(6-a^2) = a^2+a-6 = (a+3)(a-2)$ d'où $a = 2$ ou $a = -3$.

Exercice 5 [4 points]

(a) Donner un $DL_4(0)$ des fonctions suivantes : $f_1(x) = \exp(2x)$ et $f_2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$.

(b) Calculer les limites suivantes (où $a, b \in \mathbb{R}$ sont des paramètres) :
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2(ax) - \cos^2(bx)}{x^2} \quad , \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^2)}{x^2 - \sin^2 x} \quad .$$

1. **[1 pt]**: $f_1(x) = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^4}{4!} + o(x^4) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$.
   [1 pt]: $f_2(x) = \frac{1}{2}(1 + 1 - (2x)^2/2 + (2x)^4/4! + o(x^4)) = 1 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)$.
2. **[1 pt]**: Par exemple, $\dfrac{\cos^2(ax) - \cos^2(bx)}{x^2} = \dfrac{(1-(ax)^2/2 + o(x^2))^2 - (1-(bx)^2/2+o(x^2))^2}{x^2} = \dfrac{(1-a^2x^2) - (1-b^2x^2) + o(x^2)}{x^2} = \dfrac{-a^2+b^2+o(1)}{1} \to b^2 - a^2$, lorsque $x \to 0$.
   [1 pt]: On a $1 - \cos(x^2) = \dfrac{x^4}{2} + o(x^4)$ et
   $x^2 - \sin^2(x) = x^2 - (x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3))^2 = x^2 - x^2 + \dfrac{x^4}{3} + o(x^4) = \dfrac{x^4}{3} + o(x^4)$.
   D'où $\dfrac{1-\cos(x^2)}{x^2-\sin^2 x} = \dfrac{1/2+o(1)}{1/3+o(1)} \to \dfrac{3}{2}$, lorsque $x \to 0$.

Exercice 6 [3 points] Trouver la solution générale de $\dfrac{dy}{dx} + y = 3\ \exp(2x)$.

[1 pt]: Solution de l'équation homogène : $y(x) = C\exp\left(-\int_0^x 1\cdot \mathrm{d}t\right) = C\exp(-x)$, $C \in \mathbb{R}$.
[1 pt]: Solution particulière : On essaye avec $y_0(x) = a\exp(2x)$. $y_0' + y = 3a\exp(2x)$ d'où $a = 1$.
[1 pt]: Solution générale : $y(x) = C\exp(-x) + \exp(2x)$ avec $C \in \mathbb{R}$.