Mathématiques pour les Sciences (MS1)

Examen du 8 janvier 2008 ($1^{\text{ère}}$ session), durée : 2,5 heures
Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisées

Exercice 1. (4 points) Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \tag{1}$$

Exercice 2. (3 points) Trouver la limite de la suite $u_n = \frac{n+1}{n^2-1}$ quand $n \to \infty$. Justifier la réponse.

Exercice 3. (4 points) Soit $\ell(a)$ la droite donnée par sa représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = at + 1 \\ y = (1-a)t + 2. \end{cases} \tag{2}$$

(a) Pour quelle valeur de a la droite $\ell(a)$ est perpendiculaire au vecteur ${}^t(1, -1)$?

(b) Trouver la distance entre le point ${}^t(1, 2)$ et la droite $\ell(a)$.

(c) Trouver la projection de l'origine sur la droite $\ell(a)$.

(d) Pour quelle valeur de a la projection de l'origine sur $\ell(a)$ est confondue avec le point ${}^t(1, 2)$?

Exercice 4. (3 points) Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. (4 points)

(a) Donner $DL_4(0)$ des fonctions suivantes:

$$f_1(x) = \sin^2 x, \quad f_2(x) = \cos 3x\,.$$

(b) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^4}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x \cos x - (x+1)}{x^3}\,.$$

Exercice 6. (4 points) Trouver les solutions générales des équations différentielles suivantes:

$$\frac{dy}{dx} + 2x = 0, \tag{3}$$

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 0, \tag{4}$$

$$\frac{dy}{dx} + 2y = \sin x. \tag{5}$$

Mathématiques pour les Sciences (MS1)

Corrigé de l'examen du 8 janvier 2008

Solution de l'exercice 1. La démonstration est par récurrence. La formule (1) est vraie pour $n = 1$ (1 point). Si elle est vraie pour $n = m$ avec m pair, alors

$$\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^k k = \sum_{k=1}^{m}(-1)^k k - (m+1) = \frac{m}{2} - (m+1) = -\frac{m+2}{2}.$$

De même, si la formule (1) est vraie pour $k = m$ avec m impair, alors

$$\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^k k = \sum_{k=1}^{m}(-1)^k k - (m+1) = -\frac{m+1}{2} + (m+1) = \frac{m+1}{2}.$$

(3 points) $\square$

Solution de l'exercice 2.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2-1} = 0. \quad \text{(1 point)}$$

Justification = 2 points. $\square$

Solution de l'exercice 3. **(a)** (1 point) On note $v = {}^t(a, 1-a)$ le vecteur directeur de $\ell(a)$. Alors $\ell(a)$ est perpendiculaire au vecteur $w = {}^t(1, -1)$ si le produit scalaire (v, w) est nul :

$$(v, w) = a - (1-a) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = \frac{1}{2}.$$

(b) (1 point) Le point ${}^t(1, 2)$ appartient à la droite $\ell(a)$, donc la distance est nulle.

(c) (1 point) On note $P = {}^t(x, y)$ la projection de l'origine O sur la droite $\ell(a)$. Alors le vecteur OP est orthgonal à v. On obtient les trois équations suivantes:

$$\left\{\begin{array}{c} x = at+1 \\ y = (1-a)t+2 \\ ax + (1-a)y = 0. \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} t = \frac{a-2}{2a^2-2a+1}, \\ x = \frac{3a^2-4a+1}{2a^2-2a+1}, \\ y = \frac{3a^2-a}{2a^2-2a+1}. \end{array}\right.$$

Donc,

$$P = {}^t\Big(\frac{3a^2-4a+1}{2a^2-2a+1}, \frac{3a^2-a}{2a^2-2a+1}\Big).$$

(d) (1 point) La projection de l'origine est confondue avec $Q = {}^t(1, 2)$ si et seulement si $(OQ, v) = 0$. On obtient l'équation

$$a + 2(1-a) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 2.$$

$\square$

Solution de l'exercice 4. On écrit le polynôme caractéristique :

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 5 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 12.$$

Il a deux racines distinctes: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 6$ (1 point). Pour trouver les vecteurs propres correspondants, il faut résoudre les équations

$$(A - \lambda_i I)e_i = 0, \quad i = 1, 2,$$

où $e_i = {}^t(x_i, y_i)$. On a :

$$\begin{aligned} (A + 2I)e_1 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad 3x_1 + 3y_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad e_1 = {}^t(x_1, y_1) = {}^t(1, -1)\,, \\ (A - 6I)e_2 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad -5x_2 + 3y_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad e_2 = {}^t(x_2, y_2) = {}^t(3, 5)\,. \end{aligned}$$

(2 points) □

Solution de l'exercice 5. **(a)** (2 points) On a :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1 - \cos 2x}{2} = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4), \\ f_2(x) &= \frac{\sin 6x}{2} = 3x - 18x^3 + o(x^4)\,. \end{aligned}$$

(b) (2 points) En utilisant les développements limités de $\sin x$, $\cos x$ et e^x, on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^4} &= -\frac{1}{3}\,, \\ \lim_{x\to 0} \frac{e^x \cos x - (x+1)}{x^3} &= -\frac{1}{3}\,. \end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 6.

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} + 2x = 0 \quad \Longrightarrow \quad y(x) = -x^2 + C, \quad \text{(1 point)} \\ &\frac{dy}{dx} + 2y = 0 \quad \Longrightarrow \quad y(x) = C\,e^{-2x}, \quad \text{(1 point)} \\ &\frac{dy}{dx} + 2y = \sin x \quad \Longrightarrow \quad y(x) = C\,e^{-2x} + \frac{2\sin x - \cos x}{5}\,. \quad \text{(2 points)} \end{aligned}$$

□