L1 MPI
2013/2014
S1 Mathématiques

Examen de seconde session du 19 Juin 2014

Durée: 2h. Aucun document ni calculatrice autorisé. Téléphones portables interdits! Le barême suivant est donné à titre <u>indicatif</u> : 3+3+3+6+6.

Questions de cours.
a) Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels et $\ell \in \mathbb{R}$. Rappeler la définition mathématique de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.
b) Enoncer le Théorème de Rolle.

Exercice 1. On considère l'affirmation suivante : Tout nombre réel strictement positif est supérieur ou égal à au moins un entier naturel.
a) Ecrire cette affirmation en langage mathématique.
b) Ecrire sa négation.
c) Entre l'affirmation et sa négation, déterminer, en justifiant la réponse, celle qui est vraie.

Exercice 2.
a) Trouver les racines carrées du nombre complexe $15 + 8i$.
b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (2+3i)z - 5 + i = 0$.
Remarque: $\sqrt{289} = 17$.

Exercice 3. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2} + x & \text{si} \quad x \leq 0, \\ \cos(x) + \sin(x) & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

a) Justifier que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \neq 0$.
b) Montrer que f est continue en 0.
c) Rappeler, sans justifier, les valeurs des limites suivantes:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}.$$

d) Montrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 1$. En déduire que f' est continue sur $\mathbb{R}$.
e) Montrer que f' n'est pas dérivable en 0.

Exercice 4. Etant donné $n \geq 2$, on définit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = x - \cos\left(\frac{x}{n}\right)$.
a) Montrer que f_n est strictement croissante.
b) Enoncer le Théorème des valeurs intermédiaires.
c) Montrer qu'il existe un unique réel $x_n \in]0,1[$ tel que $x_n = \cos\left(\frac{x_n}{n}\right)$.
d) Montrer que pour tout $x \in]0,1[$ on a $\cos\left(\frac{x}{n}\right) < \cos\left(\frac{x}{n+1}\right)$.
e) Montrer que $f_{n+1}(x_n) < 0$ et en déduire que la suite $(x_n)_n$ est strictement croissante.
f) Montrer que la suite $(x_n)_n$ converge puis que sa limite est 1.