L1 MPI
2013/2014
S1 Mathématiques

# Examen du 13 Janvier 2014

**Durée: 2h30mn. Aucun document ni calculatrice autorisé. Téléphones portables interdits!**
**Le barême suivant est donné à titre indicatif : 4+3+6+7.**

**Questions de cours.**
**a)** Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels. Rappeler la définition mathématique de $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
**b)** Démontrer que "Toute suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$".

**Exercice 1.** Soit $z_0 = -4 + i4\sqrt{3}$.
**a)** Mettre $z_0$ sous forme exponentielle.
**b)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = z_0$. On exprimera les solutions sous forme exponentielle.

**Exercice 2.** On considère la fonction $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\left(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}\right) & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

**a)** Montrer que $f$ est continue sur $[-1,1]$.
**b)** Justifier que $f$ est dérivable sur $]-1,0[\cup]0,1[$ et calculer $f'(x)$.
**c)** Montrer que $f$ est dérivable en 0 et que $f'(0) = 1$. En déduire que $f'$ est continue sur $]-1,1[$.
**d)** Déterminer l'ensemble des $x \in ]-1,1[$ tels que $f'(x) = 0$. En déduire que $f$ est strictement croissante.
**e)** Montrer que $f$ est bijective de $[-1,1]$ dans son ensemble image $f([-1,1])$ et déterminer ce dernier.
**f)** On note $f^{-1}$ la fonction réciproque de $f$. Justifier que $f^{-1}$ est dérivable en 0 et calculer $(f^{-1})'(0)$. (On ne cherchera pas à calculer la fonction $f^{-1}$.)

**Exercice 3.** On se propose de montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

converge et de calculer sa limite. On rappelle que $0! = 0^0 = 1$.

**1. Convergence de la suite $(u_n)_n$.**
**a)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$ calculer $u_{n+1} - u_n$. En déduire que la suite $(u_n)_n$ est strictement croissante.

**TSVP**

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $v_n = u_n + \frac{1}{n\times n!}$.

**b)** Montrer que la suite $(v_n)_n$ est strictement décroissante.

**c)** Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$ et en déduire que la suite $(u_n)_n$ converge.

**2. Calcul de la limite.**

Étant donné $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \mathrm{e}^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

**a)** Que vaut $f_n(0)$? Exprimer $f_n(1)$ en fonction de $u_n$.

**b)** Justifier que $f_n$ est dérivable et montrer que $f_n'(x) = -\mathrm{e}^{-x}\frac{x^n}{n!}$.

**c)** Énoncer le théorème des accroissements finis.

**d)** En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $f_n$ sur $[0,1]$ en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \mathrm{e}$.