L1 MPI
2013/2014
S1 Mathématiques

Corrigé de l'examen du 13 Janvier 2014

Questions de cours.
a) *Soit* $(u_n)_n$ *une suite de nombres réels. Rappeler la définition mathématique de* $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N,\ u_n \geq A.$$

b) *Démontrer que "Toute suite croissante et non majorée tend vers* $+\infty$*".*

Soit $(u_n)_n$ une suite. On suppose que $(u_n)_n$ est croissante et non majorée. Soit $A \in \mathbb{R}$. Puisque $(u_n)_n$ n'est pas majorée, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \geq A$. Par ailleurs, la suite est croissante donc $\forall n \geq N$ on a $u_n \geq u_N$, et donc $u_n \geq A$ (on a $u_n \geq u_N \geq A$). On a montré que pour tout $A \in \mathbb{R}$ il existait $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $u_n \geq A$. C'est précisément la définition de $u_n \to +\infty$.

Exercice 1. *Soit* $z_0 = -4 + i4\sqrt{3}$.
a) *Mettre* z_0 *sous forme exponentielle.*

On commence par calculer le module de z_0. On a

$$|z_0| = \sqrt{(-4)^2 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{16 + 16 \times 3} = \sqrt{64} = 8.$$

On cherche ensuite un argument θ de z_0. En écrivant $z_0 = 8\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, on doit avoir $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. On en déduit que $\theta = \frac{2\pi}{3}$ (modulo 2π). La forme exponentielle de z_0 est donc $z_0 = 8\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$.

b) *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation* $z^3 = z_0$. *On exprimera les solutions sous forme exponentielle.*

On cherche $z = r\mathrm{e}^{i\alpha}$, avec $r \geq 0$, tel que $z^3 = z_0$ soit :

$$(r\mathrm{e}^{i\alpha})^3 = 8\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}} \Leftrightarrow r^3\mathrm{e}^{i3\alpha} = 8\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}} \Leftrightarrow \begin{cases} r^3 = 8, & r \geq 0 \\ 3\alpha = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2, & r \geq 0 \\ \alpha = \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Pour avoir l'ensemble des solutions il suffit de prendre $k \in \{0, 1, 2\}$ et on trouve ainsi

$$S = \{2\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{9}}, 2\mathrm{e}^{i\frac{8\pi}{9}}, 2\mathrm{e}^{i\frac{14\pi}{9}}\}.$$

Exercice 2. *On considère la fonction* $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\left(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}\right) & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

a) *Montrer que* f *est continue sur* $[-1, 1]$.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$. Par ailleurs la fonction $X \mapsto \sqrt{X}$ est définie et continue sur $[0, +\infty[$, les fonctions $x \mapsto 1 + x^2$ et $x \mapsto 1 - x^2$ sont définies et continues sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in [-1,1]$ on a $1+x^2 \geq 0$ et $1-x^2 \geq 0$. Par produit et composée de fonctions continues, la fonction f est continue sur $[-1,1]\backslash\{0\}$. Il reste à étudier la continuité en 0.

Si $x \neq 0$, on a

$$f(x) = \frac{1}{x}\left(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}\right) = \frac{1}{x} \times \frac{(1+x^2)-(1-x^2)}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}} = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}.$$

On en déduit que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$ et donc f est bien continue en 0.

Au final, f est continue sur $[-1,1]$.

b) *Justifier que f est dérivable sur $]-1,0[\cup]0,1[$ et calculer $f'(x)$.*

On raisonne comme au a) en remplaçant "continue" par "dérivable". La seule différence est que la fonction $X \mapsto \sqrt{X}$ n'est dérivable que sur $]0,+\infty[$, i.e. pas en 0. Comme $1+x^2$ et $1-x^2$ sont strictement positifs sur $]-1,1[$, on en déduit que f est dérivable sur $]-1,0[\cup]0,1[$ comme produit et composée de fonctions dérivables.

On calcule ensuite f' :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{x^2}\left(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}\right) + \frac{1}{x}\left(\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} - \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right) \\ &= -\frac{1}{x^2}\left(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}\right) + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

c) *Montrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 1$. En déduire que f' est continue sur $]-1,1[$.*

La fonction f est dérivable en 0 si et seulement si le taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ admet une limite finie quand x tend vers 0. Cette limite est alors $f'(0)$. Puisque $f(0) = 0$, en reprenant l'expression de f trouvée au a) on a, pour $x \neq 0$,

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{2}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}} \xrightarrow{x\to 0} 1.$$

On en déduit que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 1$.

Pour montrer que f' est continue sur $]-1,1[$, en utilisant l'expression de f' obtenue au b) et en raisonnant comme au a) on montre qu'elle est continue sur $]-1,0[\cup]0,1[$. Il reste à montrer qu'elle est continue en 0. A nouveau, en utilisant l'expression de f' calculée au b) on trouve que

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{x^2}\left(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}\right) + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= -\frac{2}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \xrightarrow{x\to 0} 1 = f'(0). \end{aligned}$$

On en déduit que f' est aussi continue en 0 et donc sur $]-1,1[$.

d) *Déterminer l'ensemble des $x \in]-1,1[$ tels que $f'(x) = 0$. En déduire que f est strictement croissante.*

On utilise l'expression de f' trouvée au b). On a, pour $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$,

$$\begin{aligned}
& f'(x)=0 \\
\iff\quad & -\frac{1}{x^2}\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\right)+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0 \\
\iff\quad & \frac{-\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\right)\times\sqrt{1+x^2}\times\sqrt{1-x^2}+x^2\sqrt{1-x^2}+x^2\sqrt{1+x^2}}{x^2\times\sqrt{1+x^2}\times\sqrt{1-x^2}}=0 \\
\iff\quad & -\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\right)\times\sqrt{1+x^2}\times\sqrt{1-x^2}+x^2\sqrt{1-x^2}+x^2\sqrt{1+x^2}=0 \\
\iff\quad & -(1+x^2)\sqrt{1-x^2}+(1-x^2)\sqrt{1+x^2}+x^2\sqrt{1-x^2}+x^2\sqrt{1+x^2}=0 \\
\iff\quad & \sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}=0 \\
\iff\quad & 1+x^2=1-x^2 \quad \text{car} \quad x\in]-1,1[\\
\iff\quad & x=0.
\end{aligned}$$

Or $x \neq 0$ donc f' ne s'annule pas sur $]-1,1[$.

Pour montrer que f est strictement croissante il suffit de montrer que f' est strictement positive (on a alors f strictement croissante sur $]-1,1[$ et donc sur $[-1,1]$ par continuité en -1 et en 1). Soit on reproduit le calcul ci-dessus avec des inégalités. Une autre façon est de dire que f' est continue sur $]-1,1[$, ne s'annule pas et vérifie $f'(0)=1>0$. Si on avait x_0 tel que $f'(x_0)<0$ alors par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la f' (on utilise ici la continuité de f') cette dernière devrait s'annuler entre x_0 et 0 ce qui n'est pas le cas. Conclusion $f'(x)>0$ pour tout x et donc f est strictement croissante.

e) *Montrer que f est bijective de $[-1,1]$ dans son ensemble image $f([-1,1])$ et déterminer ce dernier.*

La fonction f est continue d'après a) et strictement monotone d'après d), elle est donc bijective de $[-1,1]$ sur son ensemble image. Comme elle est strictement croissante, ce dernier est

$$f([-1,1])=[f(-1),f(1)]=[-\sqrt{2},\sqrt{2}].$$

f) *On note f^{-1} la fonction réciproque de f. Justifier que f^{-1} est dérivable en 0 et calculer $(f^{-1})'(0)$. (On ne cherchera pas à calculer la fonction f^{-1}.)*

Pour que f^{-1} soit dérivable en 0, il suffit que f soit dérivable en $f^{-1}(0)$ et que $f'(f^{-1}(0))\neq 0$. On a alors $(f^{-1})'(0)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(0))}$. Ici on a $f(0)=0$ donc $f^{-1}(0)=0$. La fonction f est bien dérivable en ce point et on a, cf c), $f'(f^{-1}(0))=f'(0)=1\neq 0$ donc f^{-1} est dérivable en 0 et $(f^{-1})'(0)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(0))}=1$.

Exercice 3. *On se propose de montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par*

$$u_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

converge et de calculer sa limite. On rappelle que $0!=0^0=1$.

1. Convergence de la suite $(u_n)_n$. (voir aussi poly de cours, p. 38, Exemple 3.44)

a) *Pour tout $n\in\mathbb{N}$ calculer $u_{n+1}-u_n$. En déduire que la suite $(u_n)_n$ est strictement croissante.*

Pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a

$$u_{n+1}-u_n=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!}-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=\frac{1}{(n+1)!}.$$

Comme $u_{n+1}-u_n>0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ on en déduit que la suite u est strictement croissante.

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $v_n = u_n + \frac{1}{n\times n!}$.
b) *Montrer que la suite $(v_n)_n$ est strictement décroissante.*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On calcule

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \left(u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)\times(n+1)!}\right) - \left(u_n + \frac{1}{n\times n!}\right)\\
&= (u_{n+1} - u_n) + \frac{1}{(n+1)\times(n+1)!} - \frac{1}{n\times n!}\\
&= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)\times(n+1)!} - \frac{1}{n\times n!}\\
&= \frac{n+2}{(n+1)\times(n+1)!} - \frac{1}{n\times n!}\\
&= \frac{n(n+2)-(n+1)^2}{n(n+1)\times(n+1)!}\\
&= -\frac{1}{n(n+1)\times(n+1)!} \ < \ 0.
\end{aligned}$$

Comme $v_{n+1} - v_n < 0$ pour tout n, on en déduit que la suite v est strictement décroissante.

c) *Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$ et en déduire que la suite $(u_n)_n$ converge.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $v_n - u_n = \frac{1}{n\times n!}$. On en déduit que $v_n - u_n \to 0$ (par exemple on peut dire que $n! \geq 1$ donc $0 \leq v_n - u_n \leq \frac{1}{n}$).

La suite u est croissante, la suite v est décroissante et $v - u$ tend vers 0, ce sont donc des suites adjacentes. Elles convergent donc toutes les deux et vers la même limite. En particulier la suite u converge.

2. Calcul de la limite.
Étant donné $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \mathrm{e}^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}.$$

a) *Que vaut $f_n(0)$? Exprimer $f_n(1)$ en fonction de u_n.*

On a $0^0 = 1$ et pour tout $k \geq 1$ on a $0^k = 0$. On en déduit que $f_n(0) = \mathrm{e}^{-0}\sum_{k=0}^{n}\frac{0^k}{k!} = \mathrm{e}^{-0}\times\frac{0^0}{0!} = 1$.

Par ailleurs, pour tout entier k on a $1^k = 1$ et donc $f_n(1) = \mathrm{e}^{-1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1^k}{k!} = \frac{u_n}{\mathrm{e}}$.

b) *Justifier que f_n est dérivable et montrer que $f_n'(x) = -\mathrm{e}^{-x}\frac{x^n}{n!}$.*

Pour tout entier k la fonction x^k est dérivable, et la fonction exponentielle est dérivable. Donc f_n est dérivable comme somme et produit de fonctions dérivables.

Si $k \geq 1$ la dérivée de x^k est kx^{k-1}, et pour $k = 0$ la fonction x^0 est constante égale à 1 pour tout x donc sa dérivée est nulle. On en déduit que

$$\begin{aligned}
f_n'(x) &= -\mathrm{e}^{-x} \times \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \mathrm{e}^{-x} \times \sum_{k=1}^{n} \frac{kx^{k-1}}{k!} \\
&= -\mathrm{e}^{-x} \times \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \mathrm{e}^{-x} \times \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= -\mathrm{e}^{-x} \times \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \mathrm{e}^{-x} \times \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^j}{j!} \qquad \text{(on a posé } j = k-1\text{)} \\
&= -\mathrm{e}^{-x} \times \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} \right) \\
&= -\mathrm{e}^{-x} \frac{x^n}{n!}.
\end{aligned}$$

c) *Énoncer le théorème des accroissements finis.*

Soient $a \leq b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

d) *En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction f_n sur $[0, 1]$ en déduire que* $\lim_{n \to +\infty} u_n = \mathrm{e}$.

D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]0, 1[$ tel que

$$f_n'(c) = \frac{f_n(1) - f_n(0)}{1 - 0} \quad \Longleftrightarrow \quad -\mathrm{e}^{-c} \times \frac{c^n}{n!} = \frac{u_n}{\mathrm{e}} - 1.$$

Attention, dans le théorème des accroissements finis le nombre c dépend a priori de la fonction f. En particulier ici c dépend de n. Cependant on a $c \in]0, 1[$ et donc $\left| -\mathrm{e}^{-c} \times \dfrac{c^n}{n!} \right| = \dfrac{\mathrm{e}^{-c}|c|^n}{n!} \leq \dfrac{1}{n!}$. On en déduit par le théorème des gendarmdes que $\frac{u_n}{\mathrm{e}} - 1$ tend vers 0 et donc que u_n tend vers e.