L1 MPI
2012/2013
S1 Mathématiques

UNIVERSITÉ de Cergy-Pontoise

Examen de 2nde session du 17 Juin 2013

Durée: 2h. Aucun document ni calculatrice autorisé. Téléphones portables interdits!

Exercice 1. Soit $z_0 = -8 - i8\sqrt{3}$.

a) Mettre z_0 sous forme exponentielle.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = z_0$. On exprimera les solutions d'abord sous forme exponentielle puis sous forme algébrique.

Exercice 2.

a) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels et $\ell \in \mathbb{R}$. Donner la définition mathématique de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

b) Rappeler, sans justification, les valeurs des limites suivantes: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$.

c) Calculer, si elle existe, la limite suivante: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(2x)}{x\sin(x)}$.

Exercice 3. Pour chacune des assertions suivantes: écrire sa négation puis dire, en le démontrant, laquelle des deux est vraie de l'assertion proposée ou de sa négation.

a) $\exists x > 0,\ x^2 + x + 1 < 2$.

b) $\forall x \in \mathbb{R},\ x < 2 \implies x^2 < 4$.

c) La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$ est croissante.

d) $\forall f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ($f$ et g sont croissantes) $\implies$ ($f \times g$ est croissante).

e) $\forall f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ($f$ et g sont croissantes et f est positive) $\implies$ ($f \times g$ est croissante).

f) $\forall f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ($f$ et g sont croissantes et positives) $\implies$ ($f \times g$ est croissante).

Exercice 4. Soient a et b deux nombres réels tels que $0 < a < b$.

a) Énoncer le théorème des accroissements finis. En déduire que $\dfrac{1}{b} < \dfrac{\ln(b) - \ln(a)}{b-a} < \dfrac{1}{a}$.

On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par

$$f(t) = \ln(ta + (1-t)b) - t\ln(a) - (1-t)\ln(b).$$

b) Justifier que f est de classe C^2, calculer f' et f'' puis étudier le signe de f''.

c) Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires. Déterminer le signe de $f'(0)$ puis de $f'(1)$ (on pourra utiliser le résultat de la question a)), puis en déduire qu'il existe un unique $c \in]0,1[$ tel que $f'(c) = 0$.

d) Donner le tableau de variation de f et montrer que pour tout $t \in]0,1[$

$$t\ln(a) + (1-t)\ln(b) < \ln(ta + (1-t)b).$$