L1 MPI
2012/2013
S1 Mathématiques

UNIVERSITÉ de Cergy-Pontoise

Examen du 18 Janvier 2013

Durée: 2h30mn. Aucun document ni calculatrice autorisé. Téléphones portables interdits!
Le barème suivant est donné à titre <u>indicatif</u> : 1+3+9+9=22.

Question de cours. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Donner la définition mathématique de $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

Exercice 1.
a) Calculer les racines carrées du nombre complexe $3 - 4i$.
b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (4 + 5i)z - 3 + 11i = 0$.

Exercice 2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} e^x - x & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x = 0, \\ \cos^2(\pi x) & \text{si } 0 < x < 1, \\ 1 & \text{si } x = 1, \\ 1 + \dfrac{\ln(x)}{x} & \text{si } x > 1. \end{cases}$

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
b) Justifier que f est dérivable sur $D =]-\infty, 0[\cup]0, 1[\cup]1, +\infty[$, et pour tout $x \in D$ calculer $f'(x)$. Dresser le tableau de variation de f.
c) Étant donnés $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$, donner la définition de "la fonction g est dérivable en x_0".
d) Rappeler, sans justification, les valeurs des limites suivantes

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x}.$$

e) La fonction f est-elle dérivable en 0? Si oui que vaut $f'(0)$?
f) La fonction f est-elle dérivable en 1? Si oui que vaut $f'(1)$?
g) Calculer, si elles existent, les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

Exercice 3. Étant donné un entier $n \geq 2$ on définit la fonction $P_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ par

$$P_n(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} x^k \right) - 1,$$

c'est-à-dire $P_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x - 1$.

1. Étude d'un cas particulier.
a) Énoncer le Théorème des Valeurs Intermédiaires.
b) Expliciter la fonction P_4 et montrer qu'elle est strictement croissante sur $[0, 1]$.
c) Montrer qu'il existe un unique $c \in]0, 1[$ tel que $P_4(c) = 0$.

TSVP

2. Construction d'une suite $(u_n)_n$.

a) Montrer que la fonction P_n est strictement croissante sur $[0,1]$.

b) Montrer qu'il existe un unique $u_n \in]0,1[$ tel que $P_n(u_n) = 0$.

3. Étude de la suite $(u_n)_n$.

a) Soit $x \in]0,1[$, montrer que pour tout $n \geq 2$ on a $P_{n+1}(x) > P_n(x)$.

b) En déduire le signe de $P_{n+1}(u_n)$ puis que la suite $(u_n)_n$ est strictement décroissante (on pourra utiliser le 1)b) avec la fonction P_{n+1}).

c) Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge. On note ℓ sa limite.

4. Calcul de la valeur de ℓ.

a) Justifier que $\ell \in [0,1[$.

b) Vérifier que pour tout $x \in]0,1[$ on a $P_n(x) = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x} - 2$.

c) En déduire que $u_n = \dfrac{1 + u_n^{n+1}}{2}$.

d) Montrer que $u_n^{n+1} \to 0$ (on pourra remarquer, après l'avoir justifié, que pour tout $n \geq 2$ on a $0 < u_n \leq u_2$ et que $u_2 < 1$).

e) En déduire la valeur de ℓ.