L1 MPI
2012/2013
S1 Mathématiques

Corrigé de l'examen du 18 Janvier 2013

Question de cours. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Par définition, $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) \geq A.$$

Exercice 1.

a) Soit $Z = 3 - 4i$. On cherche les nombres $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, tels que $z^2 = Z$. Comme deux nombres complexes sont égaux si et seulement s'ils ont même partie réelle et même partie imaginaire, en développant $z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$ on en déduit que $z^2 = Z$ si et seulement si

$$x^2 - y^2 = 3 \quad \text{et} \quad 2xy = -4.$$

Par ailleurs, si $z^2 = Z$ alors $|z|^2 = |Z|$, c'est-à-dire $x^2 + y^2 = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$. On a donc finalement

$$z^2 = Z \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcr} x^2 - y^2 & = & 3 \\ 2xy & = & -4 \\ x^2 + y^2 & = & 5 \end{array} \right. .$$

En additionnant la première et la dernière équation on obtient $x^2 = 4$ et donc, à l'aide de la première équation par exemple, $y^2 = 1$. Autrement dit on a $(x = 2$ ou $x = -2)$ et $(y = 1$ ou $y = -1)$. Par ailleurs la deuxième équation nous dit que x et y sont de signe contraire donc finalement si $z^2 = Z$ on a soit $x = 2$ et $y = -1$ soit $x = -2$ et $y = 1$, i.e. $z = 2 - i$ ou $z = -2 + i$. Réciproquement on vérifie que les deux nombres trouvés sont bien solution de $z^2 = Z$ et donc les racines carrées de $3 - 4i$ sont $2 - i$ et $-2 + i$.

b) On calcule le discriminant de cette équation. On a

$$\Delta = (-(4 + 5i))^2 - 4 \times 1 \times (-3 + 11i) = 16 - 25 + 40i + 12 - 44i = 3 - 4i \neq 0.$$

Il y a donc 2 solutions à cette équation. Si δ est une racine carrée de Δ, ces solutions s'écrivent

$$z_1 = \frac{4 + 5i + \delta}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{4 + 5i - \delta}{2}$$

On a vu au a) que $\delta = 2 - i$ était une racine carrée de Δ. On trouve donc que l'ensemble des solutions de cette équation est $S = \{3 + 2i, 1 + 3i\}$.

Exercice 2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} \mathrm{e}^x - x & \text{si} & x < 0, \\ 1 & \text{si} & x = 0, \\ \cos^2(\pi x) & \text{si} & 0 < x < 1, \\ 1 & \text{si} & x = 1, \\ 1 + \dfrac{\ln(x)}{x} & \text{si} & x > 1. \end{array} \right.$

a) Sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$ la fonction f est composée, quotient et somme de fonctions continues. La fonction f est donc continue sur chacun de ces trois intervalles. Il reste à étudier sa continuité en 0 et en 1. Par définition, f est continue en x_0 si $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

- En 0 : on a $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \mathrm{e}^x - x = 1$ et $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \cos^2(\pi x) = 1$, donc $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$ et f est bien continue en 0.

- En 1 : on a $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \cos^2(\pi x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 1 + \dfrac{\ln(x)}{x} = 1$, donc $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$ et f est bien continue en 1.

b) Sur chacun des trois intervalles $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$ la fonction f est composée, quotient et somme de fonctions dérivables. La fonction f est donc dérivable sur chacun des ces trois intervalles et donc sur $D =]-\infty, 0[\cup]0, 1[\cup]1, +\infty[$. On calcule maintenant f'.

- Si $x < 0$ on a $f(x) = \mathrm{e}^x - x$ et donc $f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$.
- Si $0 < x < 1$ on a $f(x) = \cos^2(\pi x)$ et donc $f'(x) = -2\pi \sin(\pi x)\cos(\pi x)$.
- Si $x > 1$ on a $f(x) = 1 + \dfrac{\ln(x)}{x}$ et donc $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\times x - \ln(x)}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$.

On étudie finalement le signe de f'.

- Si $x < 0$ on a $\mathrm{e}^x < 1$ et donc $f'(x) < 0$.
- Si $0 < x < 1$ on a $f'(x) = -2\pi \sin(\pi x)\cos(\pi x)$. Comme $0 < x < 1$, on a $0 < \pi x < \pi$ et donc $\sin(\pi x) > 0$. Par ailleurs, sur $]0, \pi[$ $\cos(y) \geq 0$ si et seulement si $y \leq \frac{1}{2}$. On a donc $f'(x) < 0$ sur $]0, \frac{1}{2}[$, $f'(x) > 0$ sur $]\frac{1}{2}, 1[$ et $f'(\frac{1}{2}) = 0$.
- Si $x > 1$ on a $f'(x) = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$. Le dénominateur est toujours positif et $1 - \ln(x) > 0$ si et seulement si $\ln(x) < 1$ c'est-à-dire $x < \mathrm{e}$.

En conclusion on a le tableau de variation suivant

	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		e		$+\infty$
f'(x)		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
f(x)		$\searrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$1+\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	

c) La fonction g est dérivable en x_0 si la limite $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie. Dans ce cas, la dérivée de g en x_0 est la valeur de la limite ainsi obtenue.

d) On a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

e) Pour savoir si la fonction f est dérivable en 0 on cherche si $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ existe et est finie.

Si $x < 0$ on a $f(x) = \mathrm{e}^x - x$ d'où

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\mathrm{e}^x - x - 1}{x} = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} - 1,$$

et donc $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 - 1 = 0$.

Si $0 < x < 1$ on a $f(x) = \cos^2(\pi x)$ d'où

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\cos^2(\pi x) - 1}{x} = -\frac{\sin^2(\pi x)}{x} = -\pi \sin(\pi x) \times \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}.$$

Comme $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\sin(X)}{X} = 1$ et que $X = \pi x \to 0$ lorsque $x \to 0$ on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x} = 1$ et donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 \times 1 = 0$.

On a $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

f) On raisonne comme ci-dessus, on cherche si $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ existe et est finie.

Si $0 < x < 1$ on a $f(x) = \cos^2(\pi x)$ d'où

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\cos^2(\pi x) - 1}{x - 1} = -\frac{\sin^2(\pi x)}{x - 1}.$$

En posant $X = x - 1$ on a $\sin^2(\pi x) = \sin^2(\pi X + \pi) = \sin^2(\pi X)$ et donc $\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -\dfrac{\sin^2(\pi X)}{X}$.
Comme $X \to 0$ lorsque $x \to 1$, en raisonnant comme au e) on en déduit que $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 0$.

Si $x > 1$ on a $f(x) = 1 + \dfrac{\ln(x)}{x}$ d'où $\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \dfrac{\ln(x)}{x(x-1)}$. En posant $X = x - 1$ on a $\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \dfrac{\ln(1 + X)}{X} \times \dfrac{1}{X + 1}$, et comme $X \to 0$ lorsque $x \to 1$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 1 \times 1 = 1$.

On a $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \neq \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ donc la limite $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ n'existe pas et f n'est pas dérivable en 1.

g) On trouve facilement que $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

Exercice 3. Étant donné un entier $n \geq 2$ on définit la fonction $P_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ par $P_n(x) = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k\right) - 1$.

1.

a) Théorème des Valeurs Intermédiaires: Soient I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $(a, b) \in I^2$ tels que $a \leq b$. Alors pour tout réel γ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \gamma$.

b) On a $P_4(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x - 1$. La fonction P_4 est un polynôme donc est dérivable et pour tout $x \in [0, 1]$ on a $P_4'(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1 \geq 1 > 0$ donc la fonction P_4 est strictement croissante sur $[0, 1]$.

c) La fonction P_4 est continue sur $[0, 1]$ et on a $P_4(0) = -1$ et $P_4(1) = 3$ donc 0 est compris entre $P_4(0)$ et $P_4(1)$. D'après le Théorème des Valeurs Intermédiaires il existe $c \in [0, 1]$ tel que $P_4(c) = 0$. Par ailleurs $c \neq 0$ puisque $P_4(0) \neq 0$ et $c \neq 1$ puisque $P_4(1) \neq 0$. Finalement comme P_4 est strictement croissante elle est bijective de $[0, 1]$ dans $[-1, 3]$ et donc c est unique.

2.

a) La fonction P_n est un polynôme donc est dérivable et pour tout $x \in [0, 1]$ on a $P_n'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = 1 + \sum_{k=2}^{n} kx^{k-1} \geq 1 > 0$ donc la fonction P_n est strictement croissante sur $[0, 1]$.

b) On raisonne exactement comme au 1.c) en notant que 0 est compris entre $P_n(0) = -1$ et $P_n(1) = n - 1 \geq 1$.

3.

a) Soit $x \in]0, 1[$ et $n \geq 2$. On a $P_{n+1}(x) = \left(\sum_{k=1}^{n+1} x^k\right) - 1 = x^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n} x^k\right) - 1 = x^{n+1} + P_n(x)$. Comme $x > 0$ on a $x^{n+1} > 0$ et donc $P_{n+1}(x) > P_n(x)$.

b) Puisque $u_n \in]0, 1[$ on peut appliquer a) avec $x = u_n$. On en déduit que $P_{n+1}(u_n) > P_n(u_n) = 0$. Comme la fonction P_{n+1} est strictement croissante et que $P_{n+1}(u_n) > 0 = P_{n+1}(u_{n+1})$ on a $u_n > u_{n+1}$. Ceci est vrai pour tout $n \geq 2$ donc la suite $(u_n)_n$ est strictement décroissante.

c) La suite $(u_n)_n$ est décroissante et minorée (par 0, cf 2.b)) donc elle converge.

4.

a) Pour tout $n \geq 2$ on a $0 < u_n < 1$ donc, par passage à la limite, $0 \leq \ell \leq 1$. De plus $(u_n)_n$ est strictement décroissante donc pour tout n on a $\ell < u_n < 1$ et donc $\ell \in [0, 1[$.

b) Si $x \neq 1$ on a (somme des termes d'une suite géométrique) $P_n(x) = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k\right) - 1 = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k\right) - 2 = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x} - 2$.

c) Comme $u_n \neq 1$ on peut appliquer b) avec $x = u_n$ et donc $P_n(u_n) = \frac{1-u_n^{n+1}}{1-u_n} - 2$. Par ailleurs $P_n(u_n) = 0$ donc

$$\frac{1-u_n^{n+1}}{1-u_n} - 2 = 0 \iff 1 - u_n^{n+1} = 2 - 2u_n \iff u_n = \frac{1+u_n^{n+1}}{2}.$$

d) On a vu au 2.b) que $u_n > 0$. Par ailleurs $(u_n)_n$ est décroissante donc pour tout $n \geq 2$ on a $u_n \leq u_2$. Finalement $u_2 < 1$ toujours par la question 2.b). Comme la fonction $x \mapsto x^{n+1}$ est strictement croissante sur $[0, 1]$ on en déduit que pour tout $n \geq 2$ on a $0 < u_n^{n+1} < u_2^{n+1}$. Comme $u_2 \in]0, 1[$ on a $u_2^{n+1} \to 0$ et on en déduit que $u_n^{n+1} \to 0$ par le théorème des gendarmes.

e) Pour tout $n \geq 2$ on a $u_n = \dfrac{1+u_n^{n+1}}{2}$ et $u_n^{n+1} \to 0$. On en déduit que $u_n \to \ell = \frac{1}{2}$.