L1 MPI
2011/2012
S1 Mathématiques

Examen de 2nde session du 18 Juin 2012

Durée: 2h. Aucun document ni calculatrice autorisé. Téléphones portables interdits!

Exercice 1.

a) Calculer les racines carrées du nombre complexe $-3+4i$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-3z+3-i=0$.

Exercice 2.

a) Rappeler (sans justification) les valeurs des limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

b) Calculer, si elle existe, la limite suivante : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x)}{\mathrm{e}^x-1}$.

Exercice 3.

a) Écrire la négation de la proposition mathématique (P) :

$$\forall\alpha>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x\in\mathbb{R},\ x\le\alpha\Longrightarrow x^2\le\delta.$$

Laquelle des deux propositions (P) ou (non P) est vraie?

b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Donner la définition mathématique de la phrase " la suite u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$".

Exercice 4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. On justifiera la réponse.

a) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante alors $u_n\to+\infty$.

b) Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\ge 0$, alors $u_n\to 0$.

c) Si, $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n<v_n$ et $v_n\to 0$ alors $u_n\to 0$.

d) Si $u_n\to\frac{1}{2}$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive à partir d'un certain rang.

e) Si pour tout $p\in\mathbb{N}$, $u_{2p}>0$ et $u_{2p+1}<0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Exercice 5. Soit $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ une fonction continue sur $[0,+\infty[$ et dérivable sur $]0,+\infty[$. On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=f(0)=0$. L'objectif de cet exercice est de montrer qu'il existe $c\in]0,+\infty[$ tel que $f'(c)=0$. Soit g la fonction définie sur $]0,1]$ par $g(x)=f\left(\dfrac{1}{x}-1\right)$.

a) Vérifier g est bien définie et montrer qu'elle est continue sur $]0,1]$.

b) Montrer que l'on peut prolonger g par continuité en 0. Le prolongement par continuité de g à $[0,1]$ sera encore noté g.

c) Que vaut $g(0)$? $g(1)$?

d) Montrer que g est dérivable sur $]0,1[$ et calculer g' en fonction de f' sur cet intervalle.

e) Énoncer le théorème de Rolle. Application : montrer qu'il existe $d\in]0,1[$ tel que $g'(d)=0$.

f) En déduire qu'il existe $c\in]0,+\infty[$ tel que $f'(c)=0$.