L1 MPI
2011/2012
S1 Mathématiques

Examen du 20 Janvier 2012

Durée: 2h30mn. Aucun document ni calculatrice autorisé. Téléphones portables interdits!

Exercice 1. Soit $z_0 = -4\sqrt{3} + 4i$.
a) Mettre z_0 sous forme exponentielle.
b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = z_0$. On exprimera les solutions sous forme exponentielle.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$. Donner la définition mathématique de $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$.

Exercice 3.
a) Rappeler (sans justification) les limites suivantes : $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$ et $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.
b) Étudier la limite suivante : $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin(2x)}$.

Exercice 4. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$.
a) Montrer que f est définie et continue sur $[-4, 0[\cup]0, +\infty[$.
b) Montrer f est dérivable sur $]-4, 0[\cup]0, +\infty[$. Calculer $f'(x)$.
c) Montrer que l'on peut prolonger f par continuité en 0. Par quelle valeur?

Exercice 5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par récurrence par $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1}$, et soient $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites définies par $v_n = u_n - \ln(n)$ et $w_n = u_n - \ln(n+1)$.
a) Énoncer le théorème des accroissements finis. Application : soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}$.
b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+2) - \ln(n+1) < \frac{1}{n+1}$.
c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) < u_n$. (On pourra faire un raisonnement par récurrence.)
d) Déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de la suite $(u_n)_n$.
e) Montrer que la suite $(v_n)_n$ est strictement décroissante. Indication : utiliser a).
f) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n > 0$. En déduire que $(v_n)_n$ converge. On note γ sa limite.
g) En s'inspirant des questions e) et f), montrer que la suite $(w_n)_n$ converge. Quelle est sa limite?
h) Donner un encadrement de γ à 10^{-1} près.