L1 MPI
2011/2012
S1 Mathématiques

Corrigé de l'Examen du 20 Janvier 2012

Exercice 1. $z_0 = -4\sqrt{3} + 4i$.

a) On calcule $|z_0| = \sqrt{(-4\sqrt{3})^2 + 4^2} = \sqrt{64} = 8$. On écrit alors

$$z_0 = 8\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = 8\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = 8e^{i\frac{5\pi}{6}}.$$

b) On cherche z tel que $z^3 = z_0$. Comme $0^3 = 0 \neq z_0$ on peut chercher z sous la forme $z = re^{i\theta}$ (avec $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$). On a alors

$$z^3 = z_0 \quad \Longleftrightarrow \quad r^3 e^{i3\theta} = 8e^{i\frac{5\pi}{6}} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} r^3 &= 8, \\ 3\theta &= \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Pour que $\theta \in [0, 2\pi[$ il suffit de prendre $k \in \{0, 1, 2\}$, on en déduit donc que $z^3 = z_0$ si et seulement si $r = 2$ et $\theta = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$ avec $k \in \{0, 1, 2\}$. Ainsi l'ensemble S des solutions est $S = \left\{2e^{i\frac{5\pi}{18}}, 2e^{i\frac{17\pi}{18}}, 2e^{i\frac{29\pi}{18}}\right\}$.

Exercice 2. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$, par définition, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \geq A,\ |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Exercice 3.

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ et $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

b) En notant f la fonction $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sin(2x)}$, pour tout $x \in D_f$ on écrit

$$f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{\ln(1+x)}{x} \times \frac{2x}{\sin(2x)}.$$

(Remarque: $D_f =]-1, +\infty[\setminus \{\frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\}$.) On sait que $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$. Par ailleurs $\lim_{x\to 0} 2x = 0$ et $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, donc d'après le théorème de composition sur les limites on a $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{2x} = 1$. Finalement, en utilisant les propriétés sur les produits et quotients de limites, on en déduit que $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe et vaut $\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{1} = \frac{1}{2}$.

Exercice 4. On note $f(x) = \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$.

a) La fonction $\sqrt{x+4}$ est bien définie si et seulement si $x+4 \geq 0$, i.e. $x \in [-4,+\infty[$. De plus elle est continue sur cet intervalle. La fonction $\dfrac{1}{x}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$. On déduit que $f(x)$ est définie et continue sur $[-4,+\infty[\cap\mathbb{R}^* = [-4,0[\cup]0,+\infty[$.

b) La fonction $\sqrt{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$, donc la fonction $\sqrt{x+4}-2$ est dérivable sur $]-4,+\infty[$. Comme la fonction $\dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, on déduit que f est dérivable sur $]-4,+\infty[\cap\mathbb{R}^* =]-4,0[\cup]0,+\infty[$.

Sur cet ensemble on a

$$f'(x) = \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x+4}} \times x - (\sqrt{x+4}-2) \times 1}{x^2} = \frac{-x-8+4\sqrt{x+4}}{2x^2\sqrt{x+4}}.$$

c) Par définition, la fonction f est prolongeable par continuité en 0 si $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existe et est finie. La valeur du prolongement de f en 0 est alors la valeur de cette limite. Pour tout $x \in [-4,0[\cup]0,+\infty[$, on a

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \frac{(\sqrt{x+4}-2)\times(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \frac{(\sqrt{x+4})^2-2^2}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x+4}+2}.$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x+4}+2} = \dfrac{1}{4}$, on en déduit que f est prolongeable par continuité en 0. Son prolongement $\tilde{f}$ est la fonction définie sur $[-4,+\infty[$ par $\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x \neq 0$ et $\tilde{f}(0) = \dfrac{1}{4}$.

Exercice 5.

a) Théorème des accroissements finis : Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b)-f(a) = f'(c)(b-a) \iff f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On applique le théorème précédent à la fonction ln sur l'intervalle $[n,n+1]$ (la fonction ln est continue et dérivable sur $]0,+\infty[$ et donc sur $[n,n+1]$). Il existe ainsi $c \in]n,n+1[$ tel que $\dfrac{\ln(n+1)-\ln(n)}{(n+1)-n} = \ln'(c) \iff \ln(n+1)-\ln(n) = \dfrac{1}{c}$. Comme $0 < n < c < n+1$ on a $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{n}$ et donc $\dfrac{1}{n+1} < \ln(n+1)-\ln(n) < \dfrac{1}{n}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors $n+1 \in \mathbb{N}^*$. On peut donc appliquer la question a) à l'entier $N = n+1$. La seconde inégalité s'écrit alors $\ln(n+2)-\ln(n+1) < \frac{1}{n+1}$.

c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note P_n la propriété "$\ln(n+1) < u_n$". Montrons par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- Initialisation : On montre que P_1 est vraie, c'est-à-dire que $\ln(2) < 1$. En appliquant a) avec $n = 1$, on a $\frac{1}{2} < \ln(2)-\ln(1) < 1$. Puisque $\ln(1) = 0$, la seconde inégalité prouve que P_1 est vraie.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que P_n est vraie et on montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire que $\ln(n+2) < u_{n+1}$. Comme P_n est vraie on a $\ln(n+1) < u_n$, et d'après b) on a $\ln(n+2)-\ln(n+1) < \frac{1}{n+1}$. En additionnant membre à membre ces deux inégalité, on en déduit que $\ln(n+2) < u_n + \frac{1}{n+1} = u_{n+1}$, et donc que P_{n+1} est vraie.
- Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété P_n est vraie, i.e. $\ln(n+1) < u_n$.

d) On a $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(n+1) = +\infty$ et, d'après c), $\ln(n+1) < u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Le théorème de comparaison sur les limites (Proposition 3.29 dans les notes de cours) permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

e) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - \ln(n+1) - u_n + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) < 0 \quad \text{d'après a).}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $v_{n+1} < v_n$, i.e. la suite $(v_n)_n$ est strictement décroissante.

f) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après c) on a $v_n = u_n - \ln(n) > \ln(n+1) - \ln(n) > 0$ puisque la fonction ln est strictement croissante.

La suite $(v_n)_n$ est décroissante minorée (par 0), donc elle converge.

g) On va montrer que la suite $(w_n)_n$ est croissante et majorée.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$w_{n+1} - w_n = u_{n+1} - \ln(n+2) - u_n + \ln(n+1) = \frac{1}{n+1} - \ln(n+2) + \ln(n+1) > 0 \quad \text{d'après b),}$$

  ce qui prouve que la suite $(w_n)_n$ est strictement croissante.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $w_n = u_n - \ln(n+1) < u_n - \ln(n) = v_n < v_1$ puisque la suite $(v_n)_n$ est décroissante. La suite $(w_n)_n$ est donc majorée par $v_1 = 1$.

Finalement, la suite $(w_n)_n$ est croissante et majorée donc elle converge.

Si on note γ' la limite de $(w_n)_n$ on a alors $\lim\limits_{n\to\infty} v_n - w_n = \gamma - \gamma'$. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $v_n - w_n = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - w_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0$. Par unicité de la limite, on en déduit que $\gamma - \gamma' = 0 \iff \gamma = \gamma'$, i.e. les suites $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ ont même limite.

h) La suite $(v_n)_n$ est strictement décroissante et converge vers γ. On a donc $v_n > \gamma$ pour tout n. De même, la suite $(w_n)_n$ est strictement croissante et converge vers γ, et donc $w_n < \gamma$ pour tout n. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $w_n < \gamma < v_n$. Pour avoir un encadrement de γ à 10^{-1} près, il suffit de trouver $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $v_n - w_n < 10^{-1}$. On a $v_n - w_n = \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}$ d'après a). Il suffit donc de prendre $n = 10$ pour avoir $v_n - w_n < 10^{-1}$. Ainsi, $w_{10} < \gamma < v_{10}$ est un encadrement de γ à 10^{-1} près.

Remarque : $w_{10} = u_{10} - \ln(11) = \frac{7381}{2520} - \ln(11) \simeq 0,531$ et $v_{10} = u_{10} - \ln(10) = \frac{7381}{2520} - \ln(10) \simeq 0,626$.