Université de Cergy-Pontoise
UFR de Sciences et Techniques

lundi 10 janvier 2011

MATHEMATIQUES-M1
(Durée: 2 heures 30 minutes)

Exercise 1. Soient p et n deux éléments de $\mathbb{N}$ tels que $p \leqslant n$. Quelle est la définition du coefficient binomial[1] $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$? Montrer que le naturel $n(n-1)\cdots(n-p+1)$ est un multiple de $p!$.

Exercise 2. Soit u_n une suite à valeurs réelles et $l \in \mathbb{R}$. Donner la définition mathématique de $u_n \longrightarrow \ell$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

Exercise 3.
1) Soit $A = 1 - i$. Calculer A^2 et A^4.
2) Résoudre l'équation $z^2 - 2z + 1 + \frac{1}{2}i = 0$ ($z \in \mathbb{C}$).

Exercise 4. Limite éventuelle des quantités suivantes

$$f(x) = \frac{x}{\sin(3x)} \quad \text{quand } x \longrightarrow 0, \qquad g(x) = \frac{3 + \ln x}{5 + 2\ln x} \text{ quand } x \longrightarrow +\infty.$$

Exercise 5.
1) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que $\dfrac{d}{dx}\big(\sin(x+\theta)\big) = \sin\big(x + \theta + \dfrac{\pi}{2}\big)$ puis que[2], pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{d^n}{dx^n}(\sin x) = \sin\Big(x + n\frac{\pi}{2}\Big).$$

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 \sin x$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f^{(n)}(x) = x^2 \sin\Big(x + n\frac{\pi}{2}\Big) + A_n x \sin\Big(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\Big) + B_n \sin\Big(x + (n-2)\frac{\pi}{2}\Big)$$

où A_n et B_n sont des constantes que l'on précisera (on pourra utiliser la formule de Leibnitz).

Exercise 6. Soit φ la fonction définie sur $]-1,1[$ par

$$\varphi(t) = \frac{t}{1-t^2}.$$

1) Calculer $\lim_{t \to 1^-} \varphi(t)$ et $\lim_{t \to -1^+} \varphi(t)$.
2) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$. On considère u la fonction définie sur $[-1,1]$ par

$$\begin{cases} u(t) = f\big(\varphi(t)\big) \ \text{ si } t \in]-1,1[\\ \\ u(t) = \ell \ \text{ si } t \in \{-1,1\} \end{cases}.$$

2a) Montrer que u est continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur]-1,1[. Montrer qu'il existe $t_0 \in]-1,1[$ tel que $f'\big(\varphi(t_0)\big) \times \varphi'(t_0) = 0$ (on pourra utiliser le théorème de Rolle).
2b) En déduire qu'il existe $x_0 \in]-\infty, +\infty[$ tel que $f'(x_0) = 0$.

1. Ce coefficient est aussi noté C_n^p.

2. Si f est une fonction n fois dérivable par rapport à une variable x, $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$ désigne la dérivée d'ordre n de f.