

MATHEMATIQUES

(Durée: 2 heures 30 minutes)

Exercice 1: Ecrire $z = \sqrt{3} - i$ sous forme exponentielle. Calculer z^6 .

Exercice 2: Limite éventuelle des quantité suivantes

$$f(x) = \frac{\sin(2x)}{x} \quad \text{quand } x \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{3x^3 + x^2 e^x}{x^3 + 2x^2 e^x} \quad \text{quand } x \rightarrow +\infty.$$

Exercice 3:

- 1) Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
- 2) Soit f une fonction continue sur $[1, 2]$ telle que $f(1)$ et $f(2)$ appartiennent à $[1, 2]$. Montrer qu'il existe un point $c \in [1, 2]$ tel que $f(c) = c$. On pourra appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction g définie par $g(t) = f(t) - t$.

Exercice 4: Soit $A \in \mathbb{R}$. Soit g une fonction dérivable sur \mathbb{R} vérifiant

$$g(0) = g(2) = A.$$

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{g(x) - A}{x(x-2)}.$$

- 1) Montrer que $f(x)$ tend vers $\frac{1}{2}g'(2)$ quand x tend vers 2.
- 2) Montrer que $f(x)$ tend vers $-\frac{1}{2}g'(0)$ quand x tend vers 0.
- 3) En déduire que la fonction f se prolonge par continuité en 0 et en 2.
- 4) On suppose que $g'(0) = -g'(2)$. Montrer qu'il existe un point $c \in]0, 2[$ tel que $f(c) = 0$.

Exercice 5: Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $u_n = 3 \sin(n) + 4 \cos(n)$.

- 1) Montrer que la suite u_n est majorée.
- 2) Montrer que $4 \leq \sup \{u_n | n \in \mathbb{N}\} \leq 5$.