Université de Cergy-Pontoise — M1
UFR de Sciences et techniques — jeudi 15 janvier 2009

Mathématiques

(Durée : 2 heures 30 minutes)

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1 Soit f l'application de $\{1,2,3\}$ dans $\{4,5\}$ définie par $f(1)=4, f(2)=5, f(3)=4$. f est t-elle injective, surjective, bijective ?

Exercice 2 1) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Donner la définition mathématique de $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

2) Ecrire la négation de la proposition ainsi obtenue.

Exercice 3 Soit $z_0 = -4\sqrt{2} + 4i\sqrt{2}$. Ecrire z_0 sous forme exponentielle. Résoudre $z^3 = z_0$ (exprimer les solutions sous forme exponentielle).

Exercice 4 Soit u_n la suite définie par $u_n = (-1)^n(1+\frac{1}{n})$. Déterminer deux suites extraites de u_n qui convergent vers des limites distinctes. La suite u_n est-elle convergente ?

Exercice 5 Limite éventuelle quand x tend vers 0 de la quantité suivante

$$f(x) = \frac{5x}{\sin(3x)}$$

Exercice 6 1) Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(t) = t - \ln(1+t)$. Calculer f' et montrer que

$$\forall t > 0, 0 \leqslant f'(t) \leqslant t$$

Soit $x > 0$. Appliquer le théorème des accroissements finis pour la fonction f sur l'intervalle $[0,x]$. Montrer que

$$\forall x > 0, 0 \leqslant x - \ln(1+x) \leqslant x^2$$

2) Soient $n \geqslant 1$ et $k \geqslant 1$. Montrer que

$$\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{n^4} \leqslant \ln(1+\frac{k}{n^2}) \leqslant \frac{k}{n^2}$$

3) Calculer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$ (on rappelle que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$).

4) Soit $n \geqslant 1$. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} k^2 \leqslant n^3$. En déduire la limite de $\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n} k^2$ quand n tend vers $+\infty$.

5) Montrer que $\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{k}{n^2})$ converge vers une limite que l'on calculera quand n tend vers $+\infty$.