Université de Cergy-Pontoise — Jeudi 10 janvier 2008
UFR de Sciences et techniques — M1

Mathématiques

(Durée: 2 heures 30 minutes)

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1: Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.
1) Donner la définition de dérivabilité en x_0 pour la fonction f.
2) On suppose que f est 3 fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Ecrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 près de x_0.

Exercice 2: Déterminer, si elles existent, les limites des quantités suivantes
1) $A(x) = \dfrac{\sin(2x)}{7x}$, quand x tend vers 0
2) $B(x) = \dfrac{3x^3 + 5x^2}{\sin(3x^2)}$, quand x tend vers 0

Exercice 3: Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6 = 1$. Préciser le nombre de solutions de cette équation et donner la partie réelle de chaque solution.

Exercice 4: Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par
$f(x) = x^2 \sin^2(\frac{1}{x})$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$.
1) Calculer la dérivée de f en tout point de $]0, +\infty[$.
2) Montrer que f est dérivable à droite en 0.

Exercice 5: Soient u_n, v_n, w_n les suites définies pour $n \in \mathbb{N}$ par les relations

$$u_0 = 0 \ , \quad \forall n \geq 1, \ u_n = u_{n-1} + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \ , \quad \forall n \geq 0, \ v_n = u_{2n} \text{ et } \ w_n = u_{2n+1}$$

A1) Calculer les quantités $(u_3 - u_1)$ et $(u_4 - u_2)$.
A2) Soit $n \geq 0$. Montrer que $u_{2n+2} - u_{2n} = \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n+2}$. Que peut-on en déduire sur $v_{n+1} - v_n$? Montrer que la suite v_n est croissante.
A3) Montrer que la suite w_n est décroissante.
A3) Montrer que $w_n - v_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. En déduire que les suites v_n et w_n sont adjacentes. On appelle désormais l leur limite commune.

B) Soit $x \in \mathbb{R}$. On note $[x]$ la partie entière de x. Soit $n \in \mathbb{N}$.
B1) Montrer que $n = 2[\frac{n}{2}]$ ou que $n = 2[\frac{n}{2}] + 1$.
B2) Montrer que $|u_n - l| = |v_{[\frac{n}{2}]} - l|$ ou que $|u_n - l| = |w_{[\frac{n}{2}]} - l|$. En déduire que

$$|u_n - l| \leq |v_{[\frac{n}{2}]} - l| + |w_{[\frac{n}{2}]} - l|$$

B3) On pose $\varphi(n) = [\frac{n}{2}]$. Montrer que $\varphi(n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. φ est-elle strictement croissante?
B4) On admet que les suites $v_{[\frac{n}{2}]}$ et $w_{[\frac{n}{2}]}$ convergent vers l. Montrer que la suite u_n converge vers l.