Université de Cergy-Pontoise
UFR de Sciences et techniques

Vendredi 22 décembre 2006
M1

Mathématiques

(Durée: 2 heures 30 minutes)

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1:
1) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Ecrire la définition mathématique de $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.
2) Ecrire la négation de la proposition mathématique obtenue dans la question précédente.

Exercice 2: Déterminer, si elles existent, les limites des quantités suivantes:
1) $A(x) = \dfrac{\sin x}{2x}$, quand x tend vers 0
2) $B(x) = \dfrac{\ln(x^4) + 2x^2}{3x^2 + \ln(x^4)}$, quand x tend vers $+\infty$
3) $C(x) = (e^x + x^2)\ln(1 + 3e^{-x})$, quand x tend vers $+\infty$

Exercice 3: Soient a_n et b_n deux suites vérifiant

$$\forall n \geq 0,\ a_n > 0,\ b_n > 0,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n),\ b_{n+1} = \frac{a_n b_n}{a_n + b_n}$$

1) Montrer que $\forall n \geq 0,\ a_{n+1} - b_{n+1} = \dfrac{1}{2}\dfrac{a_n^2 + b_n^2}{a_n + b_n}$. Que peut-on dire du signe de $a_n - b_n$ pour $n \geq 1$?
2) Montrer que les suites a_n et b_n sont décroissantes, et ceci à partir du rang 1.
3) Montrer que les suites a_n et b_n sont convergentes.
4) Montrer que les suites a_n et b_n convergent vers une même limite.

Exercice 4: Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant
(i) $\forall x \in [0, 1],\ x^2 \leq f(x)$
(ii) $\forall x \in [0, 1],\ x - x^2 \leq f(x)$
(iii) $\forall x \in [0, 1],\ f(x) \leq x$

1) Calculer $f(0)$ et $f(1)$. Montrer qu'il existe $c_1 \in]0, 1[$ tel que $f'(c_1) = 1$.
2) Quelle est la définition de dérivée à droite en un point? En déduire la valeur de $f'_d(0)$ puis de $f'(0)$.
3) Montrer qu'il existe $c_2 \in]0, 1[$ tel que $f''(c_2) = 0$.