Université de Cergy-Pontoise **Mercredi 14 janvier 2015**
UFR de Sciences et techniques **L1 Mathématiques**

Examen Fonctions de la variable réelle (Session1)

Durée : 2 heures 30 minutes

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1 : [QUESTION DE COURS] Démontrer le résultat suivant :

Théorème : Soient I un intervalle <u>*ouvert*</u> *de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$. Si f est dérivable en a et a est un extremum local de f alors $f'(a) = 0$.*

Exercice 2 : a) Ecrire la définition mathématique avec des quantificateurs de la propriété

$$\lim_{x \to a} f(x) = l.$$

b) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle. On considère la propriété

$$\exists k \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\quad |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

Ecrire la négation de cette propriété.
c) Calculer (si elles existent) les limites suivantes

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x^2}{\sin(x)\tan(x)}, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+3x)}{x}, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}\sin(x).$$

Exercice 3 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \frac{(1 - \cos x)^2}{x^2}.$$

a) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 en une fonction $\tilde{f}$ que l'on précisera.
b) En revenant à la définition par le calcul du taux d'accroissement, montrer que $\tilde{f}$ est dérivable en 0 et déterminer $\tilde{f}'(0)$.
c) Montrer que $\tilde{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. En déduire que $\tilde{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\tilde{f}'$.
d) Montrer que la fonction $\tilde{f}'$ est continue en 0.
e) Est-ce que $\tilde{f}''(0)$ existe ? Justifier votre réponse.

T.S.V.P.

Exercice 4 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \frac{\sin(x) - \ln(1+x)}{x^2}.$$

a) Calculer le développement limité de $\sin(x) - \ln(1+x)$ en 0 à l'ordre 3.
b) En déduire $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

Exercice 5 : Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ une fonction qui vérifie la propriété

$$(\mathbf{H}) \quad \forall x \in [a, b],\ \forall x' \in [a, b],\ \Big(x \neq x' \implies |f(x) - f(x')| < |x - x'|\Big).$$

a) Utiliser la définition pour montrer que f est continue en tout point x_0 de $[a, b]$.
b) Rappeler l'énoncé du théorème des valeurs intermédiaires.
c) Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$.
(*Indication : on pourra appliquer le b) à une fonction bien choisie en se rappelant que la fonction f est une fonction de $[a, b]$ dans $[a, b]$*).
d) Montrer que c est unique.
(*Indication : on pourra utiliser un raisonnement par l'absurde*).