Université de Cergy-Pontoise
Janvier 2015

Algèbre Linéaire

Licence MPI, première année

Durée 3 heures, documents et calculatrice interdits

Question de cours - 4 points

Soit E un espace vectoriel. On rappelle qu'un système de vecteur $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de E si tout vecteur x de E s'écrit **de façon unique**

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n = \sum_{i=1}^{n} x_ie_i$$

où les $(x_i)_{i=1..n}$ sont des scalaires.
Montrer qu'un système de vecteurs est une base si et seulement si c'est à la fois un système libre et un système générateur.

Premier exercice - 4 points

Soit E l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On définit la droite $\mathscr{D}$ par : elle passe par A de coordonnées $(1; 2; 3)$ et admet comme vecteur directeur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. On définit de même la droite $\mathscr{D}'$ par : elle passe par B de coordonnées $(-1; 0; 4)$ et admet comme vecteur directeur $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'une représentation paramétrique de $\mathscr{D}$ est donnée par :

$$M(x; y; z) \in \mathscr{D} \iff \exists t \in \mathbb{R} \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

   Déterminer deux points de $\mathscr{D}$, différents du point A.
2. Donner de même une représentation paramétrique de $\mathscr{D}'$; (on appellera s le paramètre).
3. Déterminer l'intersection de $\mathscr{D}$ et de $\mathscr{D}'$. Montrer que ces deux droites ne sont pas parallèles.

Deuxième exercice - 4 points

Soit $E = \mathbb{R}^4$. Les éléments de E seront écrits sous la forme d'une matrice colonne.

1. On considère l'ensemble F défini par :

$$F = \{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0\}$$

   Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

2. On considère les trois vecteurs u, v et w définis par :

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \ v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ w = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Montrer que les trois vecteurs sont des éléments de F et qu'ils forment un système libre.

3. Montrer que le vecteur $h = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ n'est pas dans F et en déduire que $F \neq E$ puis que (u, v, w) est une base de F.

Troisième exercice - 4 points

Soit E un espace vectoriel de dimension deux. Si f est un endomorphisme de E, on utilisera les notations $f^2 = f \circ f$ et $f^3 = f \circ f \circ f$. On s'intéresse aux endomorphismes f tels que $f^3 = f$.

1. On suppose que la matrice de f dans une base $\mathscr{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ Calculer A^2 et A^3. En déduire que f vérifie $f^3 = f$.
2. On rappelle que f est une projection si $f^2 = f$. Montrer que si f est une projection, on a $f^3 = f$.
3. On rappelle que f est une symétrie si $f^2 = \mathrm{id}_E$. Montrer de même que si f est une symétrie, on a $f^3 = f$.
4. On suppose que la matrice de f dans une base $\mathscr{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ Calculer A^2 et A^3. En déduire que f vérifie $f^3 = f$, mais que f n'est ni une projection, ni une symétrie.

Quatrième exercice - 4 points

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. On considère l'application f définie par :

$$\begin{array}{cccc} f & E & \longrightarrow & E \\ & P(X) & \longmapsto & f(P)(X) = P'(X) - P(1)X^2 \end{array}$$

1. Vérifier que si $P(X) = X^2 + 2$, on a $P(1) = 3$ et $f(P)(X) = 2X - 3X^2$.
2. Montrer que f est une application linéaire.
3. Déterminer la matrice A de f dans la base canonique $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$.
4. Calculer le déterminant de A et en déduire que A est inversible.
5. Calculer A^{-1}.