Algèbre linéaire - MPI S1 Corrigé Jan 2015

Premier exercice

1 $M(x,y,z) \in \mathcal{D} \iff \exists t \in \mathbb{R}, \vec{AM} = t\vec{u}$

$$\iff \exists t \in \mathbb{R} \begin{cases} x-1 = t \\ y-2 = -2t \\ z-3 = t \end{cases} \iff \exists t \in \mathbb{R} \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-2t \\ z = 3+t \end{cases}$$

Si $t=1$, on trouve le point $(2,0,4)$
si $t=-1$, on trouve le point $(0,4,2)$ par exemple.

2 de même $M(x\,y\,z) \in \mathcal{D}' \iff \exists s \in \mathbb{R}, \vec{BM} = s\vec{v}$

$$\iff \exists s \in \mathbb{R} \begin{cases} x = -1+2s \\ y = -s \\ z = 4-3s \end{cases}$$

3 Un point M est à la fois sur $\mathcal{D}$ et sur $\mathcal{D}'$ si ses coordonnées (x,y,z) vérifient

$$\exists t \in \mathbb{R}, \exists s \in \mathbb{R} \begin{cases} x = 1+t = -1+2s & (1) \\ y = 2-2t = -s & (2) \\ z = 3+t = 4-3s & (3) \end{cases}$$

L'équation (2) donne $s = 2t-2$; en reportant das (1), on trouve

$1+t = -1+2(2t-2) \iff 6 = 3t \iff t = 2$, donc $s = 4-2 = 2$

En reportant dans (3) : $3+2 = 4-3\times 2$ est faux : il n'y a pas de point d'intersection.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles, donc les droites ne sont pas parallèles.

Deuxième exercice. $E = \mathbb{R}^4$

1 soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ deux éléments de F, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors $x + \lambda y = \begin{pmatrix} x_1+\lambda y_1 \\ x_2+\lambda y_2 \\ x_3+\lambda y_3 \\ x_4+\lambda y_4 \end{pmatrix}$ vérifie : $(x_1+\lambda y_1) + (x_2+\lambda y_2) + 2(x_3+\lambda y_3) - (x_4+\lambda y_4)$

$$= (x_1+x_2+2x_3-x_4) + \lambda(y_1+y_2+2y_3-y_4)$$
$$= 0 + \lambda \times 0 = 0$$

donc $x+\lambda y \in F$, cela quelque soit x et y dans F, $\lambda \in \mathbb{R}$.

F est bien un s.e.v. de E

2. Vérifions que les 3 vecteurs sont dans F.

$1+1+2\times 0-2=0$ vrai

$1+0+2\times 0-1=0$ vrai

$0+(-1)+2\times 1-1=0$ vrai

Montrons qu'ils forment un système libre en prenant une combinaison linéaire

$$\alpha u+\beta v+\gamma w=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=0 & (1)\\ \alpha-\gamma=0 & (2)\\ \gamma=0 & (3)\\ 2\alpha+\beta+\gamma=0 & (4)\end{cases}$$

(3) implique $\gamma=0$, donc, par (2) $\alpha=0$ et par (1) $\beta=0$. et (4) est alors satisfaite.

L'égalité implique $\alpha=\beta=\gamma=0$, le système est libre.

3. $1+1+2\times 1-1=3\neq 0$ donc $h\notin F$; Comme $h\in E$, F est différent de E : il est de dimension inférieure stricte à 4. Comme il contient un système libre de 3 vecteurs, il est de dimension supérieure ou égale à 3, donc il est exactement de dimension 3 et ~~ce~~ système libre est une base.

Troisième exercice

1. $A=\begin{pmatrix}2&-2\\1&-1\end{pmatrix}$ $A^2=\begin{pmatrix}2&-2\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-2\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2\\1&-1\end{pmatrix}=A$

donc $\underline{A^3}=A^2\times A=A\times A=A^2=\underline{A}$ comme $A^3=M_{\mathcal{B}}(f^3)$, on a bien $M_{\mathcal{B}}(f^3)=M_{\mathcal{B}}(f)$ et $f^3=f$.

2. et 3. Si $f^2=f$, $\underline{f^3}=f^2\circ f=f\circ f=f^2=\underline{f}$
Si $f^2=id$ $f^3=f^2\circ f=id\circ f=f$ $\Big\}$ on a bien $f^3=f$

4. $A^2=\begin{pmatrix}3&-6\\2&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-6\\2&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&6\\-2&4\end{pmatrix}$, différent de A et de I_2

et $A^3=\begin{pmatrix}3&-6\\2&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&6\\-2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-6\\2&-4\end{pmatrix}=A$

donc $f^3=f$ sans que f soit une projection ou une symétrie.

Quatrième exercice

1. Si $P(X) = X^2 + 2$ $\quad P(1) = 1^2 + 2 = 3$, $P'(X) = 2X$

$f(P)(X) = 2X - 3X^2$

2. Soit P et Q deux polynômes de E, λ un scalaire

$$\begin{aligned} f(P+\lambda Q)(X) &= (P+\lambda Q)'(X) - (P+\lambda Q)(1)X^2 \\ &= P'(X)+\lambda Q'(X) - (P(1)+\lambda Q(1))X^2 \\ &= P'(X) - P(1)X^2 + \lambda(Q'(X) - \lambda Q(1)X^2) \\ &= f(P)(X) + \lambda f(Q)(X) \end{aligned}$$

, f est linéaire

Rem : $P'(X)$ est de degré maximum 1 et $f(P)(X)$ est donc un élément de E car c'est un polynôme de degré au plus 2.

3. Soit $P_0(X) = 1$ (polynôme constant)

$f(P_0)(X) = 0 - X^2$.

de même, si $P_1(X) = X$, $P_2(X) = X^2$

$f(P_1)(X) = 1 - X^2$

$f(P_2)(X) = 2X - X^2$

Dans la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$, la matrice A de f est donc

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

4. En développant par rapport à la première colonne $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

donc A est inversible

5. Résolvons $\begin{cases} x_2 = y_1 \\ 2x_3 = y_2 \\ -x_1 - x_2 - x_3 = y_3 \end{cases}$

$x_2 = y_1$

$x_3 = +\frac{1}{2}y_2$

$x_1 = -x_2 - x_3 - y_3$

$= -y_1 - \frac{1}{2}y_2 - y_3$

soit $\begin{cases} x_1 = -y_1 - \frac{1}{2}y_2 - y_3 \\ x_2 = y_1 \\ x_3 = \frac{1}{2}y_2 \end{cases}$ et $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$