L1 MIPI
17 Janvier 2020

Corrigé de l'examen de Fonctions d'une variable réelle

Exercice 1 (**Questions de cours, 2pts).**
a) *(1pt)* Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la définition de $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$ est :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x-2| < \delta \implies |f(x)-5| < \varepsilon.$$

b) *(1pt)* Le théorème des valeurs intermédiaires dit :

> Soient I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $a, b \in I$ tels que $a \leq b$. Alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = k$.

Exercice 2 (**2pts).** On considère la proposition (P) suivante :

$$\exists a > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ x > 4 \Longrightarrow x^3 > a.$$

a) *(1pt)* La négation de (P) est : $\forall a > 0,\ \exists x \in \mathbb{R},\ x > 4 \ \text{ et } \ x^3 \leq a$.
b) *(1pt)* La proposition (P) vraie. Si on prend, par exemple, $a = 1$ on a bien pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x > 4 \Longrightarrow x^3 > 1$.

Exercice 3 (**4pts).**
a) *(1pt)* On a $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$.
b) *(3pts)* • Pour tout $x > -\dfrac{1}{3}$, $x \neq 0$, on a $\dfrac{\ln(1+3x)}{2x} = \dfrac{\ln(1+3x)}{3x} \times \dfrac{3}{2}$. Comme $\displaystyle\lim_{x\to 0} 3x = 0$ et $\displaystyle\lim_{X\to 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$, par composition des limites ($X = 3x$) on en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{3x} = 1$ et donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{2x} = 1 \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

• Par composition et quotient de limites on a immédiatement $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{2\cos(x)} - 1}{\cos(x)} = \mathrm{e}^2 - 1$.

• Pour tout $x \neq 0$ on a $\dfrac{\mathrm{e}^x - x^3}{x^2+1} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2} \times \dfrac{1 - \frac{x^3}{\mathrm{e}^x}}{1 + \frac{1}{x^2}}$. Par croissances comparées on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{\mathrm{e}^x} = 0$. On en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1 - \frac{x^3}{\mathrm{e}^x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 1$. Toujours par croissances comparées on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^2} = +\infty$ et donc finalement

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x - x^3}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^2} \times \frac{1 - \frac{x^3}{\mathrm{e}^x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = +\infty.$$

Exercice 4 (4pts).

a) *(1pt)* On a

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon_1(x) \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_2(x),$$

où ε_1 et ε_2 vérifient $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = \lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$.

b) *(1,5pt)* En utilisant la question précédente et les règles de calcul sur les développements limités on a

$$\begin{aligned} \ln(1+x)\mathrm{e}^x &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) \times \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) + x^3\varepsilon_3(x) \\ &= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x), \end{aligned}$$

où $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_3(x) = \lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

c) *(1,5pt)* En utilisant le développement limité calculé à la question précédente on obtient

$$\frac{\ln(1+x)\mathrm{e}^x - x - \dfrac{x^2}{2}}{x^3} = \frac{\dfrac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)}{x^3} = \frac{1}{3} + \varepsilon(x),$$

et donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)\mathrm{e}^x - x - \dfrac{x^2}{2}}{x^3} = \dfrac{1}{3}$.

Exercice 5 (8pts). Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

a) *(2pts)* La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et la fonction $x \mapsto x^2 + 4$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $x^2 + 4 \in]0, +\infty[$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+4}$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et donc sur $\mathbb{R}^*$, en tant que composée de fonctions dérivables. Ainsi la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. Si $u(x) = \sqrt{x^2+4} - 2$, la formule de dérivation des fonctions composées donne $u'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$ et la formule de dérivation d'un quotient donne alors

$$f'(x) = \frac{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}x - \sqrt{x^2+4} + 2}{x^2} = \frac{x^2 - (x^2+4) + 2\sqrt{x^2+4}}{x^2\sqrt{x^2+4}} = \frac{2\left(\sqrt{x^2+4} - 2\right)}{x^2\sqrt{x^2+4}}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a $x^2+4 > 4$, ainsi $\sqrt{x^2+4} > 2$ et donc $\sqrt{x^2+4} - 2 > 0$. Par ailleurs on a également $x^2\sqrt{x^2+4} > 0$. Finalement $f'(x)$ est le quotient de deux nombres strictement positifs et donc $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

b) *(1,5pt)* Par définition f est dérivable en 0 si la limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ existe et est finie. Dans ce cas $f'(0)$ est la valeur de cette limite. Pour tout $x \neq 0$ on a

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\sqrt{x^2+4} - 2}{x^2} = \frac{x^2 + 4 - 2^2}{x^2\left(\sqrt{x^2+4} + 2\right)} = \frac{x^2}{x^2\left(\sqrt{x^2+4} + 2\right)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+4} + 2}.$$

On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+4} + 2} = \dfrac{1}{4}$. Conlusion : f est dérivable en 0 et $f'(0) = \dfrac{1}{4}$.

c) *(2pts)* Pour tout $x > 0$ on a $\sqrt{x^2} = |x| = x$ donc

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x} = \frac{\sqrt{x^2(1+\frac{4}{x^2})}-2}{x} = \frac{x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}-2}{x} = \sqrt{1+\frac{4}{x^2}}-\frac{2}{x}.$$

On en déduit que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$. De même pour tout $x < 0$ on a $\sqrt{x^2} = |x| = -x$ donc

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x} = \frac{\sqrt{x^2(1+\frac{4}{x^2})}-2}{x} = \frac{-x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}-2}{x} = -\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}-\frac{2}{x}.$$

On en déduit que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$.

D'après les questions a) et b) la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc continue. De plus $f' > 0$ donc f est strictement croissante. On a donc $f(\mathbb{R}) = \left]\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[=]-1,1[$.

d) *(1pt)* Comme f est strictement monotone elle est bijective de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R}) =]-1,1[$. La fonction f^{-1} est alors définie sur $f(\mathbb{R})$, i.e. sur $]-1,1[$.

e) *(1,5pt)* La fonction f est dérivable. De plus $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ d'après a) et b), en particulier f' ne s'annule jamais. Cela prouve que f^{-1} est dérivable et on a $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))}$. Comme $f(0) = 0$ on a $f^{-1}(0) = 0$ et donc $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(0)} = 4$.

Exercice 6. (10pts).

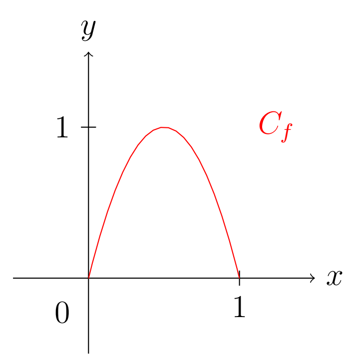
Partie I. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. On considère les trois hypothèses (H0)-(H1)-(H2) suivantes :

$$f(0) = f(1) = 0 \qquad \textbf{(H0)}$$

$$f'(0) > 0 \quad \text{et} \quad f'(1) < 0 \qquad \textbf{(H1)}$$

$$\forall x \in [0,1],\ f''(x) < 0 \qquad \textbf{(H2)}$$

a) *(1pt)*



On suppose maintenant que f vérifie les trois hypothèses (H0)-(H1)-(H2).

b) *(1,5pt)* Pour montrer l'existence de c il y a deux méthodes possibles.

Méthode 1 : La fonction f est deux fois dérivable donc dérivable sur $[0,1]$. Comme de plus $f(0) = f(1)$ on peut appliquer le théorème de Rolle ce qui prouve qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $f'(c) = 0$.

Méthode 2 : La fonction f est deux fois dérivable donc f' est dérivable donc continue sur l'intervalle $[0,1]$. On peut donc appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction

f'. Puisque $f'(0) > 0$ et $f'(1) < 0$ on a 0 qui est compris entre $f(0)$ et $f(1)$ donc il existe $c \in]0,1[$ (0 et 1 sont exclus puisque $f'(0) \neq 0$ et $f'(1) \neq 0$) tel que $f'(c) = 0$.

L'hypothèse (H2) implique que la fonction f' est strictement décroissante et donc injective sur $[0,1]$. Cela garantit l'unicité de c.

c) *(2pts)* La fonction f' est strictement décroissante et $f'(c) = 0$. Donc $f'(x) > 0$ sur $[0,c[$ et $f'(x) < 0$ sur $]c,1]$. La fonction f est donc strictement croissante sur $[0,c]$ et strictement décroissante sur $[c,1]$. On en déduit que pour tout $x \in]0,c]$ on a $f(x) > f(0) = 0$ et pour tout $x \in [c,1[$ on a $f(x) > f(1) = 0$. On a donc $f(x) > 0$ pour tout $x \in]0,c] \cup [c,1[=]0,1[$.

Remarque : En utilisant la méthode 1 au b) on constate que b) ne nécessite pas l'hypothèse (H1). Le fait que f' soit strictement décroissant n'utilise que (H2) et implique que $f'(0) > f'(c) = 0$ et $f'(1) < f'(c) = 0$. Ainsi il n'était pas nécessaire de supposer l'hypothèse (H1), celle-ci est une conséquence de (H0) et (H2).

Partie II. Soit I un intervalle et $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable vérifiant $g''(x) < 0$ pour tout $x \in I$.

a) Dans cette question on **fixe** $a, b \in I$ avec $a < b$. On considère la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = g\big(xa + (1-x)b\big) - xg(a) - (1-x)g(b).$$

i) *(1,5pt)* Soit $x \in [0,1]$. On écrit $xa+(1-x)b = b+x(a-b)$. Puisque $a-b < 0$ et $0 \leq x \leq 1$ on a $0 \geq x(a-b) \geq (a-b)$ et donc $b \geq xa + (1-x)b \geq a$, i.e. $xa + (1-x)b \in [a,b]$. Comme I est un intervalle et que $a, b \in I$ on a $xa+(1-x)b \in I$ et donc $g\big(xa+(1-x)b\big)$ est bien défini. Finalement $f(x)$ est bien défini pour tout $x \in [0,1]$.

La fonction f est deux fois dérivable comme composée et différence de fonctions deux fois dérivables. On calcule alors

$$f'(x) = (a-b)g'\big(xa + (1-x)b\big) - g(a) + g(b) \quad \text{et} \quad f''(x) = (a-b)^2 g''\big(xa + (1-x)b\big).$$

ii) *(1pt)* On vérifie facilement que $f(0) = g(b) - g(b) = 0$ et $f(1) = g(a) - g(a) = 0$ donc (H0) est vérifiée. Par ailleurs $g'' < 0$ par hypothèse et $(a-b)^2 > 0$ donc $f''(x) = (a-b)^2 g''\big(xa + (1-x)b\big) < 0$ et (H2) est vérifiée.

iii) *(2pts)* On a $f'(0) = (a-b)g'(b) - g(a) + g(b)$ et $f'(1) = (a-b)g'(a) - g(a) + g(b)$. La fonction g est dérivable donc d'après le théorème des accroissements finis il existe $c \in]a,b[$ tel que $g(b)-g(a) = (b-a)g'(c)$. On a donc $f'(0) = (a-b)g'(b)+(b-a)g'(c) = (b-a)\big(g'(c) - g'(b)\big)$ et $f'(1) = (a-b)g'(a) + (b-a)g'(c) = (b-a)\big(g'(c) - g'(a)\big)$.

On a $g'' < 0$ donc g' est strictement décroissante. Comme $a < c < b$ on a donc $g'(c) - g'(b) > 0$ et $g'(c) - g'(a) < 0$, et ainsi $f'(0) > 0$ et $f'(1) < 0$ ce qui prouve que (H1) est vérifiée.

b) *(1pt)* Soient $a, b \in I$ avec $a < b$. On considère la fonction f définie comme dans la question a). Elle vérifie les hypothèses (H0)-(H1)-(H2) de la partie I donc, d'après la question I.c), pour tout $x \in]0,1[$ on a $f(x) > 0$, i.e.

$$g\big(xa+(1-x)b\big) - xg(a) - (1-x)g(b) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \underline{g\big(xa + (1-x)b\big) > xg(a) + (1-x)g(b)}.$$

On a bien montré

$$\forall a < b \in I,\ \forall x \in]0,1[,\ g\big(xa + (1-x)b\big) > xg(a) + (1-x)g(b).$$