L1 MIPI
17 Janvier 2020

Examen de Fonctions d'une variable réelle

Durée: 2h30. Aucun document ni calculatrice autorisé.
Les téléphones portables sont INTERDITS et doivent être ETEINTS.
Tout résultat non justifié sera considéré comme faux.
Le total des points est sur 30 (le barême de chaque exercice est donné à titre indicatif).
Note finale: les 10 premiers points comptent en totalité, les suivants pour moitié.
Par exemple, pour un total de 16 sur 30, la note sera $10 + 6/2 = 13$ sur 20.

Exercice 1 (Questions de cours, 2pts).
a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Donner la définition, **avec les quantificateurs**, de $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$.
b) Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 2 (2pts). On considère la proposition (P) suivante:

$$\exists a > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ x > 4 \Longrightarrow x^3 > a.$$

a) Ecrire la négation de la proposition (P).
b) La proposition (P) est-elle vraie ou fausse? Justifiez votre réponse.

Exercice 3 (4pts).
a) Rappeler, sans justification, les limites $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ et $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$.
b) Calculer, si elles existent, les limite suivantes:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{2x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^{2\cos(x)} - 1}{\cos(x)} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x - x^3}{x^2+1}.$$

Exercice 4 (4pts).
a) Rappeler les développements limités en 0 à l'ordre 3 des fonctions $\ln(1+x)$ et e^x.
b) Déterminer un développement limité en 0 à l'ordre 3 de la fonction $\ln(1+x)e^x$.
c) Calculer, si elle existe, la limite $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)e^x - x - \frac{x^2}{2}}{x^3}$.

Exercice 5 (8pts). Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+4} - 2}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, calculer f' et justifier que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

TSVP

b) Montrer, en utilisant la définition, que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = \dfrac{1}{4}$.

c) Déterminer les limites $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, puis en déduire quel est l'ensemble $f(\mathbb{R})$. Justifiez soigneusement votre réponse.

d) Justifier que f est bijective de $\mathbb{R}$ sur un ensemble que l'on précisera. On note f^{-1} la fonction réciproque de f. Quel est l'ensemble de définition de f^{-1}?

e) Justifier que f^{-1} est dérivable en 0 et calculer $(f^{-1})'(0)$.

Exercice 6. (10pts).

Partie I. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. On considère les trois hypothèses (H0)-(H1)-(H2) suivantes:

$$f(0) = f(1) = 0 \qquad \textbf{(H0)}$$

$$f'(0) > 0 \quad \text{et} \quad f'(1) < 0 \qquad \textbf{(H1)}$$

$$\forall x \in [0,1],\ f''(x) < 0 \qquad \textbf{(H2)}$$

a) Représenter graphiquement un exemple de fonction f vérifiant les hypothèses (H0) et (H1).
On suppose maintenant que f vérifie les trois hypothèses (H0)-(H1)-(H2).

b) Montrer qu'il existe un unique $c \in]0,1[$ tel que $f'(c) = 0$.

c) Donner le tableau de variation de f et en déduire que $f(x) > 0$ pour tout $x \in]0,1[$.

Partie II. Soit I un intervalle et $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable vérifiant $g''(x) < 0$ pour tout $x \in I$.

a) Dans cette question on **fixe** $a, b \in I$ avec $a < b$. On considère la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = g\big(xa + (1-x)b\big) - xg(a) - (1-x)g(b).$$

- **i)** Justifier que f est bien définie sur $[0,1]$, qu'elle est deux fois dérivable, et exprimer f' et f'' à l'aide de g' et g''.
- **ii)** Montrer que f vérifie les hypothèses (H0) et (H2) de la partie I.
- **iii)** Montrer que f vérifie l'hypothèse (H1) de la partie I. Indication: on pourra utiliser le théorème des accroissements finis.

b) Montrer que g vérifie la propriété

$$\forall a < b \in I,\ \forall x \in]0,1[,\ g\big(xa + (1-x)b\big) > xg(a) + (1-x)g(b).$$

N.B. Une fonction g vérifiant cette dernière propriété est dite strictement concave.