L1 MIPI
18 Juin 2019

UNIVERSITÉ
de Cergy-Pontoise

Corrigé de l'examen de Fonctions d'une variable réelle - Session 2

Exercice 1 (Questions de cours, 2pts).

a) *(1pt)* Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$, la définition de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ est

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x > A \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

b) *(1pt)* Le théorème de Rolle dit:

> Soient $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Si f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, et si $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 2 (5pts).

a) *(1pt)* On a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$.

b) *(1+1pt)* Pour tout $x > -\frac{1}{4}$, $x \neq 0$, on a $\dfrac{\ln(1+4x)}{2x} = \dfrac{\ln(1+4x)}{4x} \times 2$. Comme $\lim\limits_{x\to 0} 4x = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\ln(1+X)}{X} = 1$, par composition des limites ($X = 4x$) on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+4x)}{4x} = 1$ et donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+4x)}{2x} = 1 \times 2 = 2.$$

La fonction $\sin$ est continue sur $\mathbb{R}$, en particulier en 0, et $\sin(0) = 0$, donc il existe $\delta > 0$ tel que si $|x| < \delta$ on a $|\sin(x)| < \frac{1}{4}$. Pour tout $x \in]-\delta, 0[\cup]0, \delta[$ on a alors $\sin(x) > -\frac{1}{4}$, i.e. $1 + 4\sin(x) > 0$, et $\sin(x) \neq 0$ et on peut donc écrire

$$\frac{\ln(1+4\sin(x))}{2x} = \frac{\ln(1+4\sin(x))}{4\sin(x)} \times \frac{\sin(x)}{x} \times 2.$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0} 4\sin(x) = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\ln(1+X)}{X} = 1$, par composition des limites $\big(X = 4\sin(x)\big)$ on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+4\sin(x))}{4\sin(x)} = 1$. Par produit de limites, on a donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+4\sin(x))}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+4\sin(x))}{4\sin(x)} \times \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \times 2 = 1 \times 1 \times 2 = 2.$$

c) *(1+1pt)* Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ et donc $\frac{1}{2} \leq 1 + \frac{\sin(x)}{2} \leq \frac{3}{2}$. En particulier $1 + \frac{\sin(x)}{2} > 0$ et donc $f(x) = \ln\left(1 + \frac{\sin(x)}{2}\right)$ est bien définie sur $\mathbb{R}$. Comme les fonctions $\ln$ et $\sin$ sont dérivables sur $]0, +\infty[$ et $\mathbb{R}$ respectivement, par composée de fonctions dérivables la fonction f est dérivable et la formule de dérivation des fonctions composées donne

$$f'(x) = \frac{\frac{\cos(x)}{2}}{1 + \frac{\sin(x)}{2}} = \frac{\cos(x)}{2 + \sin(x)}.$$

Exercice 3 (4pts).
a) *(1pt)* On a

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_1(x) \quad \text{et} \quad \sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_2(x),$$

où ε_1 et ε_2 vérifient $\lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = \lim_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$.
b) *(1,5pt)* En utilisant la question précédente et les règles de calcul sur les développements limités on a

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x \sin(x) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) \times \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + x^3\varepsilon_3(x) \\ &= x + x^2 + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x), \end{aligned}$$

où $\lim_{x\to 0} \varepsilon_3(x) = \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.
c) *(1,5pt)* En utilisant le développement limité calculé à la question précédente on obtient

$$\frac{\mathrm{e}^x \sin(x) - x - x^2}{x^3} = \frac{\frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)}{x^3} = \frac{1}{3} + \varepsilon(x),$$

et donc $\lim_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x \sin(x) - x - x^2}{x^3} = \dfrac{1}{3}$.

Exercice 4 (4pts). *Chaque question vaut 1pt.*
a) Faux. La fonction f peut prendre plusieurs fois une même valeur. Si on prend par exemple la fonction nulle, on a $f(0) = f(1) = 0$ et 0 a plusieurs antécédents (une infinité en l'occurence).
b) Vrai. C'est ce qu'affirme le Théorème des valeurs intermédiaires.
c) Vrai. Comme f est continue, le Théorème des valeurs intermédiaires assure que f prend au moins une fois toute valeur comprise entre $f(0)$ et $f(1)$. Par ailleurs si $x, y \in [0, 1]$ sont distincts, et en appelant x le plus petit et y le plus grand, comme f est strictement croissante on a $f(x) < f(y)$ et donc f ne peut pas prendre deux fois la même valeur. Finalement f prend bien une fois et une seule fois toute valeur comprise entre $f(0)$ et $f(1)$.
d) Faux. Par exemple la fonction $f :]0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ est continue mais n'est pas bornée. Elle n'est pas majorée puisque $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

Exercice 5 (5pts).
a) *(1pt)* Si $A \subset E$ alors $f(A) = \{f(x) \in F \,|\, x \in A\} = \{y \in F \,|\, \exists x \in A,\ y = f(x)\}$, et si $B \subset F$ alors $f^{-1}(B) = \{x \in E \,|\, f(x) \in B\}$.
b) *(1pt)* Soit $x \in A$. Par définition de l'ensemble $f(A)$ on a $f(x) \in f(A)$ et donc par définition de l'ensemble $f^{-1}(B)$ avec $B = f(A)$ on a $x \in f^{-1}\big(f(A)\big)$. On a montré que tout élément de A est aussi élément de $f^{-1}\big(f(A)\big)$, i.e. $A \subset f^{-1}\big(f(A)\big)$.
c) *(1pt)* Soit $y \in f\big(f^{-1}(B)\big)$. Par définition de l'ensemble $f(A)$ avec $A = f^{-1}(B)$ il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$, et par définition de l'ensemble $f^{-1}(B)$ on a $f(x) \in B$ et donc $y \in B$. On a montré que tout élément de $f\big(f^{-1}(B)\big)$ est aussi élément de B, i.e. $f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B$.
d) *(2pt)* Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$, $A = [-1, 2]$ et $B = [-4, 9]$. On a alors

$$\begin{aligned} f([-1,2]) &= \{x^2 \,|\, -1 \le x \le 2\} \ = \ [0,4], \\ f^{-1}\big(f([-1,2])\big) &= f^{-1}([0,4]) \ = \ \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 \le x^2 \le 4\} \ = \ [-2,2], \\ f^{-1}([-4,9]) &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, _4 \le x^2 \le 9\} \ = \ [-3,3], \\ f\big(f^{-1}([-4,9])\big) &= f([-3,3]) \ = \ \{x^2 \,|\, -3 \le x \le 3\} \ = \ [0,9]. \end{aligned}$$

On remarque que $A = [-1, 2] \subsetneq [-2, 2] = f^{-1}\big(f(A)\big)$ et que $f\big(f^{-1}(B)\big) = [0, 9] \subsetneq [-4, 9] = B$. On en déduit que les inclusions montrées aux questions b) et c) peuvent être strictes.