L1 MIPI
18 Juin 2019

UNIVERSITÉ
de Cergy-Pontoise

Examen de Fonctions d'une variable réelle - Session 2

Durée: 1h30. Aucun document ni calculatrice autorisé.
Les téléphones portables sont INTERDITS et doivent être ETEINTS.
Tout résultat non justifié sera considéré comme faux.

Exercice 1 (Questions de cours, 2pts).
a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Donner la définition, avec les quantificateurs, de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.
b) Enoncer le théorème de Rolle.

Exercice 2 (5pts).
a) Rappeler, sans justification, les limites suivantes: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$.
b) Calculer, si elles existent, les limites $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+4x)}{2x}$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(1+4\sin(x)\right)}{2x}$.
c) Montrer que la fonction $f(x) = \ln\left(1 + \dfrac{\sin(x)}{2}\right)$ est définie sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Exercice 3 (4pts).
a) Rappeler les développements limités en 0 à l'ordre 3 des fonctions e^x et $\sin(x)$.
b) Déterminer un développement limité en 0 à l'ordre 3 de la fonction $\mathrm{e}^x \sin(x)$.
c) Calculer, si elle existe, la limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x \sin(x) - x - x^2}{x^3}$.

Exercice 4 (4pts). Pour chacune des affirmations suivantes dire si elle est vraie ou fausse. Justifier votre réponse (lorsque la réponse est fausse, on pourra juste donner un contre-exemple).
a) Si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est continue alors f prend une fois et une seule fois toute valeur comprise entre $f(0)$ et $f(1)$.
b) Si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est continue alors f prend au moins une fois tout valeur comprise entre $f(0)$ et $f(1)$.
c) Si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est continue et strictement croissante alors f prend une fois et une seule fois toute valeur comprise entre $f(0)$ et $f(1)$.
d) Si $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ est continue alors f est bornée.

Exercice 5 (5pts). Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.
a) Soient $A \subset E$ et $B \subset F$. Donner les définitions des ensembles $f(A)$ et $f^{-1}(B)$.
b) Soit $A \subset E$. Montrer que $A \subset f^{-1}\big(f(A)\big)$.
c) Soit $B \subset F$. Montrer que $f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B$.
d) Dans cette question on prend $E = F = \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$, $A = [-1, 2]$ et $B = [-4, 9]$. Déterminer les ensembles $f(A)$, $f^{-1}\big(f(A)\big)$, $f^{-1}(B)$ et $f\big(f^{-1}(B)\big)$. Que peut-on en déduire quant aux questions b) et c)?