**L1 MIPI**
**18 Janvier 2019**

UNIVERSITÉ
de Cergy-Pontoise

# Corrigé de l'examen de Fonctions d'une variable réelle

**Exercice 1 (Questions de cours, 5pts).**

**a)** *(1pt)* Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$, la définition de $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ est

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x < A \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

**b)** *(1pt)* Le théorème des accroissements finis dit :

> Soient $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Si $f$ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ alors il existe $c \in ]a,b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

**c) i)** *(0,5pt)* $f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A,\ y = f(x)\}$, i.e. $f(A)$ est le sous-ensemble de $F$ constitué des images de tous les éléments de $A$.

**ii)** *(1,5pt)* On veut montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Il faut donc montrer que si $y \in f(A \cap B)$ alors $y \in f(A) \cap f(B)$. Soit donc $y \in f(A \cap B)$. Par définition de $f(A \cap B)$ il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$. Par définition de $A \cap B$ on a donc $x \in A$ et $x \in B$. Ainsi $y = f(x) \in f(A)$ et $y = f(x) \in f(B)$. On a $y \in f(A)$ et $y \in f(B)$ d'où $y \in f(A) \cap f(B)$.

**iii)** *(1pt)* On prend, par exemple, $E = F = \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ et $A = [-2, 1]$ et $B = [-1, 3]$. On a alors $f(A) = [0, 4]$, $f(B) = [0, 9]$ et donc $f(A) \cap f(B) = [0, 4]$. Par ailleurs $A \cap B = [-1, 1]$ et donc $f(A \cap B) = [0, 1]$. On a bien $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ mais $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$

**Exercice 2 (5pts).**

**a)** *(1pt)* On a $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ et $\lim_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$.

**b)** *(1,5pt)* Pour tout $x \neq 0$ on a $\dfrac{\mathrm{e}^{5x} - 1}{3x} = \dfrac{\mathrm{e}^{5x} - 1}{5x} \times \dfrac{5}{3}$. Comme $\lim_{x \to 0} 5x = 0$ et $\lim_{X \to 0} \dfrac{e^X - 1}{X} = 1$, par composition des limites ($X = 5x$) on en déduit que $\lim_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{5x} - 1}{5x} = 1$ et donc

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^{5x} - 1}{3x} = 1 \times \frac{5}{3} = \frac{5}{3}.$$

**c)** *(1,5pt)* Pour tout $x$ tel que $\sin(3x) \neq 0$, par exemple $x \in \left]-\frac{\pi}{3}, 0\right[ \cup \left]0, \frac{\pi}{3}\right[$, on a

$$\frac{\mathrm{e}^{2\sin(3x)} - 1}{x} = \frac{\mathrm{e}^{2\sin(3x)} - 1}{2\sin(3x)} \times \frac{\sin(3x)}{3x} \times 6.$$

Comme $\lim_{x \to 0} 2\sin(3x) = 0$ et $\lim_{X \to 0} \dfrac{e^X - 1}{X} = 1$, par composition des limites $\big(X = 2\sin(3x)\big)$ on en déduit que $\lim_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{2\sin(3x)} - 1}{2\sin(3x)} = 1$. De même $\lim_{x \to 0} 3x = 0$ et $\lim_{X \to 0} \dfrac{\sin(X)}{X} = 1$, par composition des limites ($X = 3x$) on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{3x} = 1$. Finalement, par produit de limites, on a donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{2\sin(3x)}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{2\sin(3x)}-1}{2\sin(3x)} \times \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{3x} \times 6 = 1 \times 1 \times 6 = 6.$$

**d)** *(1pt)* La fonction $f$ peut s'écrire comme la composée $f = g \circ h$ des fonctions $g(x) = \mathrm{e}^x$ et $h(x) = 2\sin(3x)$. La formule de dérivation des fonctions composées donne donc

$$f'(x) = h'(x) \times g' \circ h(x) = 6\cos(3x)\mathrm{e}^{2\sin(3x)}.$$

*Remarque* : le quotient $\dfrac{\mathrm{e}^{2\sin(3x)}-1}{x}$ qui apparait à la question c) est le taux d'accroissement en $0$ de la fonction $f$. La limite recherchée au c) correspond donc à $f'(0)$. Le calcul de $f'$ montre qu'on a bien $f'(0) = 6$.

**Exercice 3 (7pts).** Soit $f$ la fonction définie sur $D = ]-1, 0[ \cup ]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

**a)** *(1,5pt)* La fonction $\ln$ est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ donc $g(x) = \ln(1+x)$ est bien définie et dérivable sur $]-1, +\infty[$ et donc sur $D$. La fonction définie par $h(x) = x$ est dérivable sur $D$ et ne s'y annule pas. Finalement $f = \dfrac{g}{h}$ est dérivable sur $D$ en tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, et pour tout $x \in D$ on a

$$f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{h(x)^2} = \frac{\frac{1}{1+x}x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}.$$

**b)** *(1pt)* La fonction $f$ est continue (car dérivable) sur $D$. Elle est prolongeable par continuité en $0$ si et seulement si elle admet une limite finie $\ell$ lorsque $x$ tend vers $0$. Son prolongement en $0$ est alors défini par $f(0) = \ell$ et la fonction ainsi prolongée est continue sur $I = D \cup \{0\} = ]1, +\infty[$. Ici on a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ donc $f$ est prolongeable par continuité en $0$ en posant $f(0) = 1$.

**c) i)** *(1pt)* $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon : ]-1, +\infty[ \to \mathbb{R}$ qui vérifie $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

**ii)** *(1pt)* La fonction $f$ est dérivable en $0$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ existe et est finie. Dans ce cas $f'(0)$ est la limite obtenue. Ici on a pour tout $x \in D$, en utilisant le i),

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{\dfrac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)}{x} - 1}{x} = \frac{-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + x^2\varepsilon(x)}{x} = -\frac{1}{2} + \frac{x}{3} + x\varepsilon(x).$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = -\dfrac{1}{2}$ et donc que $f$ est dérivable en $0$ avec $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.

**iii)** *(1pt)* D'après les questions a) et c)ii) on sait que $f$ est dérivable sur $I = ]-1, +\infty[$ avec

$$f'(x) = \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)} \quad \text{si } x \neq 0, \quad \text{et} \quad f'(0) = -\frac{1}{2}.$$

Par définition, $f$ est de classe $C^1$ si et seulement si $f'$ est continue. Le même raisonnement qu'au a) montre que $f'$ est continue sur $D = I \setminus \{0\}$. Il reste à montrer la continuité en $0$, i.e. $\lim_{x\to 0} f'(x) = f'(0)$. En utilisant c)i) on a, pour tout $x \in D$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x - (1+x) \times \left(x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)\right)}{x^2(1+x)} \\ &= \frac{-\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + x^3\tilde{\varepsilon}(x)}{x^2(1+x)} \\ &= \frac{-\dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{6} + x\tilde{\varepsilon}(x)}{1+x}, \end{aligned}$$

où $\tilde{\varepsilon}$ vérifie $\lim_{x\to 0} \tilde{\varepsilon}(x) = 0$. On en déduit que $\lim_{x\to 0} f'(x) = -\dfrac{1}{2} = f'(0)$ et donc $f'$ est bien continue en $0$. Finalement $f'$ est continue sur $I$ et donc $f$ est de classe $C^1$.

**iv)** *(1,5pt)* Par définition, $f$ est deux fois dérivable en $0$ si $f'$ est dérivable en $0$ et on a alors $f''(0) = (f')'(0)$. Pour cela on regarde la limite du taux d'accroissement de $f'$ en $0$. Pour tout $x \in D$, et en utilisant le calcul effectué au c)iii) on a

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \frac{\dfrac{-\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + x\tilde{\varepsilon}(x)}{1+x} + \dfrac{1}{2}}{x} = \frac{-\dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{6} + x\tilde{\varepsilon}(x) + \dfrac{1}{2}(1+x)}{x(1+x)} = \frac{\dfrac{2}{3} + \tilde{\varepsilon}(x)}{1+x}.$$

Comme $\lim_{x\to 0} \tilde{\varepsilon}(x) = 0$ on en déduit que $\lim_{x\to 0} \dfrac{f'(x) - f'(0)}{x} = \dfrac{2}{3}$ et donc $f$ est deux fois dérivable en $0$ avec $f''(0) = \dfrac{2}{3}$.

**Exercice 4 (6pts).** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{4x}}{\mathrm{e}^{3x}+1}$.

**a)** *(1pt)* La fonction $f$ est dérivable comme quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. On calcule alors

$$f'(x) = \frac{4\mathrm{e}^{4x}\left(\mathrm{e}^{3x}+1\right) - \mathrm{e}^{4x} \times 3\mathrm{e}^{3x}}{\left(\mathrm{e}^{3x}+1\right)^2} = \frac{\mathrm{e}^{4x}\left(\mathrm{e}^{3x}+4\right)}{\left(\mathrm{e}^{3x}+1\right)^2} > 0.$$

La fonction $f$ est dérivable sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

**b)** *(1pt)* Puisque $f$ est dérivable et que $\mathbb{R} = ]-\infty, +\infty[$ est un intervalle ouvert, si $f$ admettait un minimum ou un maximum (même local) sa dérivée $f'$ s'annulerait en ce point. Puisque $f'$ ne s'annule pas ($f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$) il ne peut pas y avoir ni minimum ni maximum.

**c)** *(2pts)* On a $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{4x} = \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{3x} = 0$. On en déduit immédiatement que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Pour étudier la limite en $+\infty$ on écrit

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{4x}}{\mathrm{e}^{3x}\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right)} = \frac{\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{-3x}}.$$

On a alors $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x} = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} 1 + \mathrm{e}^{-3x} = 1 + 0 = 1$ et donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Comme la fonction $f$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ on a

$$f(\mathbb{R}) = \left]\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[ = ]0, +\infty[.$$

**d)** *(1pt)* La fonction $f$ est strictement croissante donc est injective, et donc bijective de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R}) = ]0, +\infty[$. Sa fonction réciproque est alors définie sur $f(\mathbb{R})$, i.e. sur $]0, +\infty[$.

**e)** *(1pt)* La fonction $f$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]0, +\infty[$, dérivable et sa dérivée $f'$ ne s'annule pas. Donc $f^{-1}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a

$$(f^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)}.$$

Comme $f(0) = \dfrac{1}{2}$ on a $f^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$ et donc $(f^{-1})'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{f'(0)}$. En utilisant a) on a $f'(0) = \dfrac{5}{4}$ et finalement $(f^{-1})'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{4}{5}$.

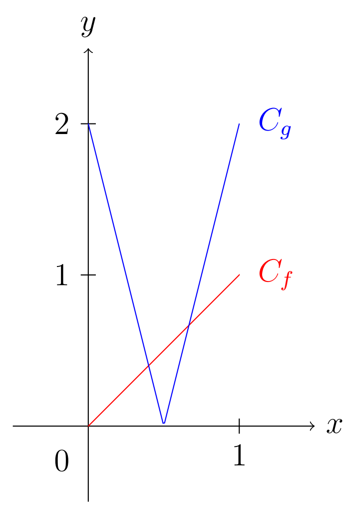
**Exercice 5 (7pts).** Soient $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues qui vérifient l'hypothèse (H) :

$$\forall x \in [0,1],\ \exists y \in [0,1],\ g(y) = f(x).$$

**a) i)** *(1pt)* Soit $z \in f\big([0,1]\big)$. Par définition il existe $x \in [0,1]$ tel que $z = f(x)$. Puisque $f$ et $g$ vérifient (H) il existe $y \in [0,1]$ tel que $f(x) = g(y)$ et donc $z = g(y)$. On a ainsi $z \in g\big([0,1]\big)$. On a donc montré que si $z \in f\big([0,1]\big)$ alors $z \in g\big([0,1]\big)$, autrement dit on a $f\big([0,1]\big) \subset g\big([0,1]\big)$.

*Remarque* : en fait $f\big([0,1]\big) \subset g\big([0,1]\big)$ est une formulation équivalent de (H). On vient de montrer que si $f$ et $g$ vérifient (H) alors $f\big([0,1]\big) \subset g\big([0,1]\big)$. Réciproquement, si $f\big([0,1]\big) \subset g\big([0,1]\big)$ on montre que $f$ et $g$ vérifient (H). En effet, <u>soit $x \in [0,1]$</u>. On a donc $f(x) \in f\big([0,1]\big)$. Puisque $f\big([0,1]\big) \subset g\big([0,1]\big)$ on en déduit que $f(x) \in g\big([0,1]\big)$ et donc <u>il existe $y \in [0,1]$ tel que $f(x) = g(y)$</u>.

**ii)** *(1pt)*




**b) i)** *(1pt)* La fonction $g$ est continue sur le segment $[0,1]$ donc (cf cours) elle admet un minimum et un maximum, i.e. il existe $a, b \in [0,1]$ tels que pour tout $x \in [0,1]$ on ait $g(a) \leq g(x) \leq g(b)$.

**ii)** *(2pts)* On applique (H) avec $x = a$. Il existe donc $y \in [0,1]$ tel que $g(y) = f(a)$. Or on a $g(a) \leq g(x)$ pour tout $x \in [0,1]$ et donc en particulier $g(a) \leq g(y) = f(a)$.
De même, on applique (H) avec $x = b$. Il existe donc $y \in [0,1]$ tel que $g(y) = f(b)$. Or on a $g(b) \geq g(x)$ pour tout $x \in [0,1]$ et donc en particulier $g(b) \geq g(y) = f(b)$.

**iii)** *(2pts)* La fonction $h = f - g$ est continue sur $[0,1]$, donc sur l'intervalle d'extrémités $a$ et $b$. De plus, d'après ii), $h(a) \leq 0$ et $h(b) \geq 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe donc $x$ entre $a$ et $b$, en particulier $x \in [0,1]$, tel que $h(x) = 0$, i.e. tel que $f(x) = g(x)$.