L1 MIPI
18 Janvier 2019

Examen de Fonctions d'une variable réelle

Durée: 2h30. Aucun document ni calculatrice autorisé.
Les téléphones portables sont INTERDITS et doivent être ETEINTS.
Tout résultat non justifié sera considéré comme faux.
Le total des points est sur 30 (le barême de chaque exercice est donné à titre indicatif).
Note finale: les 10 premiers points comptent en totalité, les suivants pour moitié.
Par exemple, pour un total de 16 sur 30, la note sera $10 + 6/2 = 13$ sur 20.

Exercice 1 (Questions de cours, 5pts).

a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Donner la définition, avec les quantificateurs, de $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$.

b) Enoncer le théorème des accroissements finis.

c) Soient E, F deux ensembles, $f : E \to F$ une application et $A, B \subset E$.

i) Rappeler la définition de l'ensemble $f(A)$.

ii) Montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

iii) Donner un exemple dans lequel l'inclusion est stricte, c'est-à-dire un exemple dans lequel $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ mais $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.

Exercice 2 (5pts).

a) Rappeler, sans justification, les limites suivantes: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$.

b) Calculer, si elle existe, la limite $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{5x} - 1}{3x}$.

c) Calculer, si elle existe, la limite $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{2\sin(3x)} - 1}{x}$.

d) Calculer la dérivée de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{2\sin(3x)}$.

Exercice 3 (7pts). Soit f la fonction définie sur $D =]-1, 0[\cup]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(1 + x)}{x}$.

a) Justifier rapidement que f est dérivable sur D et calculer sa dérivée.

b) Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité en 0 et préciser la valeur du prolongement en 0. On notera toujours f la fonction ainsi prolongée et définie sur $]-1, +\infty[$.

c) i) Rappeler, sans justification, le développement limité à l'ordre 3 de la fonction $\ln(1 + x)$.

ii) Montrer que f est dérivable en 0 et déterminer $f'(0)$.

iii) Montrer que la fonction f est de classe C^1 sur sur $]-1, +\infty[$.

iv) Montrer que f est deux fois dérivable en 0 et déterminer $f''(0)$.

Exercice 4 (6pts). Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{4x}}{\mathrm{e}^{3x}+1}$.

a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, calculer f' et en déduire que f est strictement croissante.

b) La fonction f admet-elle un minimum? Un maximum? Justifiez votre réponse.

c) Déterminer les limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, puis en déduire quel est l'ensemble $f(\mathbb{R})$. Justifiez votre réponse.

d) Justifier que f est bijective de $\mathbb{R}$ sur un ensemble que l'on précisera. On note f^{-1} la fonction réciproque de f. Quel est l'ensemble de définition de f^{-1}?

e) Justifier que f^{-1} est dérivable en $\dfrac{1}{2}$ et calculer $(f^{-1})'\left(\dfrac{1}{2}\right)$. Indication: $f(0) = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 5 (7pts). Soient $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On suppose que f et g vérifie l'hypothèse (H) suivante:

$$\forall x \in [0,1],\ \exists y \in [0,1],\ g(y) = f(x).$$

a) i) Comparer $f\big([0,1]\big)$ et $g\big([0,1]\big)$.

ii) Représenter, sur un même graphe, deux fonctions f et g vérifiant l'hypothèse (H) et telles que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et $g(0) = g(1) = 2$.

b) i) Justifier qu'il existe $a, b \in [0,1]$ tels que pour tout $x \in [0,1]$ on ait $g(a) \leq g(x) \leq g(b)$.

ii) Montrer que $g(a) \leq f(a)$ et que $g(b) \geq f(b)$.

iii) En déduire qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = g(x)$.