Université de Cergy-Pontoise
UFR de Sciences et techniques

Vendredi 19 janvier 2018
L1 Mathématiques

Examen Fonctions de la variable réelle (Session1)

Durée : 2 heures 30 minutes

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Questions de cours (2pts) : 1) Donner la définition mathématique (avec des quantificateurs) de $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$.
2) Enoncer le théorème des accroissements finis.

Exercice 1 (6pts) : 1) Rappeler sans justification la valeur des limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

2) Calculer (si elles existent) les limites suivantes

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+5x)}{x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin(x)\ln(1+5x)}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin^2(x)}.$$

Exercice 2 (4pts) : On considère la fonction $f(x) = x + \ln(\cos x)$ définie sur $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.

a) Calculer la dérivée de f sur $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$.
b) En déduire que f est bijective de $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ sur un intervalle J que l'on précisera.
c) Calculer la dérivée en 0 de la fonction réciproque f^{-1}.

Exercice 3 (4pts) : On définit la fonction $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x \sin(x)}{x}$.

1) Rappeler les développements limités à l'ordre 2 des fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \sin(x)$.
2) Calculer le développement limité en 0 et à l'ordre 2 de $x \mapsto e^x \sin(x)$ et en déduire le développement limité en 0 et à l'ordre 1 de la fonction f.
3) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 en une fonction g que l'on précisera.
4) Justifier que g est dérivable en 0 et calculer $g'(0)$.

T.S.V.P.

Exercice 4 (4pts) : On dit qu'une fonction réelle $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur un intervalle $[a, b]$ est hölderienne d'exposant $\alpha > 0$ si la propriété suivante est satisfaite :

$$(P) \qquad \exists M > 0,\ \forall x \in [a, b],\ \forall y \in [a, b],\ \ |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^{\alpha}.$$

1) Écrire la négation de cette propriété.
2) Montrer qu'une fonction f hölderienne d'exposant $\alpha > 0$ est continue sur $[a, b]$.
3) On considère une fonction f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. On suppose de plus qu'il existe $M > 0$ tel que $|f'(x)| \leq M$ pour tout $x \in]a, b[$. Montrer que f est hölderienne sur $[a, b]$ d'exposant $\alpha = 1$.
4) Montrer qu'une fonction f hölderienne d'exposant $\alpha > 1$ est constante sur $[a, b]$.