L1 MIPI
13 Juin 2017

Examen de Fonctions d'une variable réelle. Seconde session.

Durée: 1h30. Aucun document ni calculatrice autorisé.
Les téléphones portables sont INTERDITS et doivent être ETEINTS.
Tout résultat non justifié sera considéré comme faux.

Exercice 1 (6pts).
a) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Donner la définition (avec les quantificateurs!) de $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.
b) Rappeler (sans justification) les valeurs des limites suivantes : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.
c) Calculer, si elles existent, les limites : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(3x)}{x}$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2(2x)}{x \ln(1+x)}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x \sin\left(\dfrac{1}{2x}\right)$.
d) Calculer, si elle existe, la limite : $\lim\limits_{x \to 0} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Exercice 2 (8pts). On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 2}{x}$.
a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée f'.
b) Rappeler (sans justification) le développement limité en 0 à l'ordre 3 de la fonction e^x. En déduire celui de la fonction e^{-x}.
c) En utilisant les DL obtenus à la question précédente, justifier que f est prolongeable par continuité en 0 et préciser la valeur de son prolongement. On notera toujours f la fonction ainsi prolongée par continuité.
d) i) Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$, rappeler la définition de "g est dérivable en x_0" ainsi que celle du nombre dérivé $g'(x_0)$.
ii) Montrer que la fonction f est dérivable en 0 et déterminer $f'(0)$. Indication: on pourra utiliser les DL obtenus à la question **b)**.

Exercice 3 (6pts). Soient E, F, G trois ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications.
a) Rappeler les définitions de "f est injective", de "f est surjective" et de "f est bijective".
b) Rappeler la définition de l'application $g \circ f$.
c) Montrer que "(f et g sont injectives) $\Rightarrow$ ($g \circ f$ est injective)".
d) Montrer que "(f et g sont surjectives) $\Rightarrow$ ($g \circ f$ est surjective)".
e) Montrer que les réciproques des implications données aux questions **c)** et **d)** sont fausses. Indication: on pourra considérer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ définie par $f(x) = \mathrm{e}^x$ et $g : \mathbb{R}^* \to]0, +\infty[$ définie par $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$.