L1 MIPI
10 Janvier 2017

Examen de Fonctions d'une variable réelle

Durée: 2h30. Aucun document ni calculatrice autorisé.
Les téléphones portables sont INTERDITS et doivent être ETEINTS.
Tout résultat non justifié sera considéré comme faux.

Questions de cours (3pts).

a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Donner la définition (avec les quantificateurs!) de $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$.

b) Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

c) Enoncer le théorème des accroissements finis.

Exercice 1 (6pts).

a) i) Rappeler (sans justification) les valeurs des limites suivantes : $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$ et $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.

ii) Calculer, si elles existent, les limites $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{x}$ et $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{\mathrm{e}^x - 1}$.

b) i) A l'aide du théorème des gendarmes déterminer $\lim_{x\to +\infty} \frac{\cos(x)}{x}$.

ii) Calculer, si elle existe, la limite $\lim_{x\to +\infty} \frac{x + \cos(x)}{x+2}$.

c) Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin\big(x^2 + \sin(x)\big)$.

Exercice 2 (4pts).

a) Rappeler les développements limités en 0 à l'ordre 3 des fonctions e^x et $\cos(x)$.

b) Déterminer un développement limité en 0 à l'ordre 3 de la fonction $\mathrm{e}^x \cos(x)$.

c) Calculer, si elle existe, la limite $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x \cos(x) - 1 - x}{x^3}$.

Exercice 3 (3pts). On considère la proposition (P) suivante:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ |x| < \eta \implies |x\ln(x) - 1| < \varepsilon.$$

a) Traduire la proposition (P) en termes de limite? Est-elle vraie ou fausse?

b) Ecrire la négation de la proposition (P).

TSVP

Exercice 4 (4pts). Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Pour simplifier les notations on supposera que $f'(a) \leq f'(b)$. Soit $k \in \mathbb{R}$ tel que $f'(a) \leq k \leq f'(b)$. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $k = f'(c)$.

On définit la fonction g sur $]a,b]$ par $g(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ et la fonction h sur $[a,b[$ par $h(x) = \dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}$.

a) Justifier que les fonctions g et h sont continues sur leur ensemble de définition.

b) Montrer que la fonction g est prolongeable par continuité au point a et que la fonction h est prolongeable par continuité au point b. On précisera dans les deux cas la valeur du prolongement par continuité.
Par la suite on notera toujours g et h les fonctions ainsi prolongées et définies sur $[a,b]$.

c) On suppose que $k \leq \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

i) Montrer qu'il existe $d \in [a,b]$ tel que $k = g(d)$.
ii) En déduire qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f'(c) = k$.

d) On suppose maintenant que $k \geq \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

i) Montrer qu'il existe $d \in [a,b]$ tel que $k = h(d)$.
ii) En déduire qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f'(c) = k$.

N.B. Cet exercice montre que la fonction f' vérifie la conclusion du théorème des valeurs intermédiaires même sans supposer que f' est continue. Ce résultat porte le nom de Théorème de Darboux.