L1 MIPI
13 Juin 2017

Corrigé de l'examen de Fonctions d'une variable réelle. Seconde session.

Exercice 1.

a) $\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x - x_0| < \eta\ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| < \epsilon.$

b) On a $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ et $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$

c) • On écrit $\frac{\sin(3x)}{x} = 3 \times \frac{\sin(3x)}{3x}$. Comme $\lim_{x\to 0} 3x = 0$ et $\lim_{X\to 0} \frac{\sin(X)}{X} = 1$, par composition des limites ($X = 3x$) on en déduit que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{3x} = 1$ et donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x} = 3 \times 1 = 3.$$

• On écrit

$$\frac{\sin^2(2x)}{x\ln(1+x)} = 4 \times \left(\frac{\sin(2x)}{2x}\right)^2 \times \frac{x}{\ln(1+x)}.$$

Le même argument que ci-dessus montre que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{2x} = 1$. Par ailleurs, on a $\frac{x}{\ln(1+x)} = \frac{1}{\frac{\ln(1+x)}{x}}$. Par produit et quotient de limites on obtient donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(2x)}{x\ln(1+x)} = 4 \times 1^2 \times \frac{1}{1} = 4.$$

• On écrit $x\sin\left(\frac{1}{2x}\right) = \frac{\sin\left(\frac{1}{2x}\right)}{\frac{1}{2x}} \times \frac{1}{2}$. Comme $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{2x} = 0$ et $\lim_{X\to 0} \frac{\sin(X)}{X} = 1$, par composition des limites ($X = \frac{1}{2x}$) on en déduit que

$$\lim_{x\to +\infty} x\sin\left(\frac{1}{2x}\right) = 1 \times \frac{1}{2}.$$

d) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$ donc

$$0 \leq \left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|.$$

Comme $\lim_{x\to 0} |x| = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$

Exercice 2. $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 2}{x}$.

a) Les fonctions e^x et e^{-x} sont dérivables sur $\mathbb{R}^*$, et la fonction x est dérivable et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$. La fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme somme et quotient, dont le dénominateur ne s'annule pas, de fonctions dérivables. Les formules de dérivation donnent alors

$$f'(x) = \frac{(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})x - (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 2)}{x^2}.$$

b) On a

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x), \qquad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

En remplaçant x par $-x$ on a

$$\mathrm{e}^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - x^3\varepsilon(-x)$$

Puisque $\lim_{x\to 0} -x = 0$, en posant $\varepsilon_1(x) = -\varepsilon(-x)$ on a

$$\mathrm{e}^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_1(x), \qquad \lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0.$$

c) La fonction f est prolongeable par continuité en 0 si, par définition, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existe et est finie. La valeur de cette limite donne alors la valeur du prolongement en 0. A l'aide du b) on écrit

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)\right) + \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_1(x)\right) - 2}{x} \\ &= \frac{x^2 + x^3(\varepsilon(x) + \varepsilon_1(x))}{x} \\ &= x + x^2(\varepsilon(x) + \varepsilon_1(x)), \end{aligned}$$

et donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. La fonction f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

d) i) g est dérivable en x_0 si et seulement si la limite $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie. La valeur de cette limite est le nombre dérivé $g'(x_0)$.

ii) Pour savoir si f est dérivable en 0 il faut étudier la limite en 0 du rapport $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{f(x)}{x}$ puisque $f(0) = 0$. Le calcul de la question c) montre que

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x + x^2(\varepsilon(x) + \varepsilon_1(x))}{x} = 1 + x(\varepsilon(x) + \varepsilon_1(x)).$$

On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$. La fonction f est donc dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.

Exercice 3.

a) • f est injective si tout élément de F possède au plus un antécédent dans E par f, i.e.

$$\forall x, x' \in E,\ f(x) = f(x') \ \Rightarrow x = x'.$$

• f est surjective si tout élément de F possède au moins un antécédent dans E par f, i.e.

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x).$$

• f est bijective si tout élément de F possède exactement un antécédent dans E par f, i.e.

$$\forall y \in F,\ \exists ! x \in E,\ y = f(x).$$

b) $g \circ f$ est l'application de E dans G définie par
$$\forall x \in E,\ g \circ f(x) = g\left(f(x)\right).$$
c) On suppose que f et g sont injectives, i.e.
$$\forall x, x' \in E,\ f(x) = f(x')\ \Rightarrow x = x' \quad \text{et} \quad \forall y, y' \in F,\ g(y) = g(y')\ \Rightarrow y = y'. \qquad (Inj)$$
Montrons que $g \circ f$ est injective, i.e.
$$\forall x, x' \in E,\ g \circ f(x) = g \circ f(x')\ \Rightarrow x = x'.$$
Soient donc $x, x' \in E$ tels que $g \circ f(x) = g \circ f(x')$. Par définition de $g \circ f$ on a donc $g\left(f(x)\right) = g\left(f(x')\right)$. Puisque g est injective, en appliquant (Inj) avec $y = f(x)$ et $y' = f(x')$ on en déduit que $f(x) = f(x')$. Mais f est injective et donc $x = x'$, ce qui prouve le résultat.
d) On suppose que f et g sont surjectives, i.e.
$$\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x) \quad \text{et} \quad \forall z \in G,\ \exists y \in F,\ z = g(y). \qquad (Surj)$$
Montrons que $g \circ f$ est surjective, i.e.
$$\forall z \in G,\ \exists x \in E,\ z = g \circ f(x).$$
Soit donc $z \in G$. Puisque g est surjective il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$. Par ailleurs f est surjective donc il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On a donc $z = g(y) = g\left(f(x)\right)$, i.e. $z = g \circ f(x)$ ce qui prouve bien que $g \circ f$ est surjective.

e) Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ définie par $f(x) = \mathrm{e}^x$ et $g : \mathbb{R}^* \to]0, +\infty[$ définie par $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Ici on a donc $E = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{R}^*$ et $G =]0, +\infty[$. On vérifie que g n'est pas injective, par exemple $g(-1) = g(1)$ alors que $-1 \neq 1$, et que f n'est pas surjective. En effet, $\mathrm{e}^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc $-2 \in \mathbb{R}^*$ n'a pas d'antécédent par f.

La fonction $g \circ f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ est définie par
$$g \circ f(x) = \frac{1}{(f(x))^2} = \frac{1}{(\mathrm{e}^x)^2} = \mathrm{e}^{-2x}.$$
On vérifie facilement que $g \circ f$ est injective et surjective (donc bijective). En effet, l'unique antécédent de $y > 0$ par $g \circ f$ est $x = -\frac{1}{2}\ln(y)$.
Conclusion: $g \circ f$ est injective n'implique pas que g et f le sont (ici g ne l'est pas), et de même $g \circ f$ est surjective n'implique pas que g et f le sont (ici f ne l'est pas). Les réciproques des implications données aux questions c) et d) sont donc toutes les deux fausses.
Remarque: on peut montrer (faites-le!) que si $g \circ f$ est injective alors f est injective, et que si $g \circ f$ est surjective alors g l'est.