L1 MIPI
10 Janvier 2017

UNIVERSITÉ
de Cergy-Pontoise

Corrigé de l'examen de Fonctions d'une variable réelle

Questions de cours (3pts).

a) $\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x-a| < \eta \Rightarrow f(x) \geq A$.

b) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $a, b \in I$ tels que $a \leq b$. Alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.

c) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c) \times (b - a)$.

Exercice 1 (6pts).

a) i) On a $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$ et $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

ii) • On écrit $\frac{\ln(1+3x)}{x} = 3 \times \frac{\ln(1+3x)}{3x}$. Comme $\lim_{x\to 0} 3x = 0$ et $\lim_{X\to 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$, par composition des limites ($X = 3x$) on en déduit que $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{3x} = 1$ et donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{x} = 3 \times 1 = 3.$$

• On écrit

$$\frac{\ln(1+3x)}{\mathrm{e}^x - 1} = \frac{\ln(1+3x)}{x} \times \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}.$$

D'après la question i) on a $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} = \frac{1}{1} = 1$. Donc par produit de limites on obtient

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{\mathrm{e}^x - 1} = 3 \times 1 = 3.$$

b) i) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $-1 \leq \cos(x) \leq 1$. Donc pour tout $x > 0$ on a $-\frac{1}{x} \leq \frac{\cos(x)}{x} \leq \frac{1}{x}$.

Puisque $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to +\infty} -\frac{1}{x} = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\cos(x)}{x} = 0.$$

ii) On écrit

$$\frac{x + \cos(x)}{x + 2} = \frac{x\left(1 + \frac{\cos(x)}{x}\right)}{x\left(1 + \frac{2}{x}\right)} = \frac{1 + \frac{\cos(x)}{x}}{1 + \frac{2}{x}}.$$

D'après i) on a $\lim_{x\to +\infty} 1 + \frac{\cos(x)}{x} = 1$, et on a $\lim_{x\to +\infty} 1 + \frac{2}{x} = 1$. Donc, par quotient de limites dont le dénominateur est non nul, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+\cos(x)}{x+2} = 1$.

c) La fonction f peut s'écrire comme la composée $f(x) = g \circ h(x)$ des fonctions $g(x) = \sin(x)$ et $h(x) = x^2 + \sin(x)$. La formule de dérivation des fonctions composées donne donc

$$f'(x) = h'(x) \times g' \circ h(x) = (2x + \cos(x)) \times \cos\left(x^2 + \sin(x)\right).$$

Exercice 2 (4pts).

a) On a

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_1(x) \quad \text{et} \quad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon_2(x),$$

où $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = \lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$.

b) En utilisant la question précédente et les règles de calcul sur les développements limités on a

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x \cos(x) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) \times \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + x^3\varepsilon_3(x) \\ &= 1 + x - \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x), \end{aligned}$$

où $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_3(x) = \lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

c) En utilisant le développement limité calculé à la question précédente on obtient

$$\frac{\mathrm{e}^x \cos(x) - 1 - x}{x^3} = \frac{-\dfrac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)}{x^3} = -\frac{1}{3} + \varepsilon(x),$$

et donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x \cos(x) - 1 - x}{x^3} = -\dfrac{1}{3}$.

Exercice 3 (3pts).

a) La proposition (P) signifie $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 1$, la fonction $x\ln(x)$ étant définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
Cette proposition est fausse puisque $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$.

b) La négation de (P) s'écrit

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists x \in \mathbb{R}_+^*,\ |x| < \eta \ \text{ et } \ |x\ln(x) - 1| \geq \varepsilon.$$

Exercice 4 (4pts).

a) La fonction f est dérivable sur $[a, b]$ donc elle y est continue. On en déduit que les fonctions $f(x) - f(a)$ et $x - a$ sont continues sur $]a, b]$. Par ailleurs, la fonction $x - a$ ne s'annule pas sur $]a, b]$. La fonction g est le quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, elle est donc continue. Le même raisonnement s'applique à la fonction h sur l'intervalle $[a, b[$.

b) Pour montrer que g est prolongeable par continuité au point a il faut montrer, par définition, que $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existe et est finie. Comme f est dérivable au point a, par définition on a

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

La fonction g est donc prolongeable par continuité au point a et la valeur de son prolongement au point a est $g(a) = f'(a)$.

Le même raisonnement s'applique à la fonction h au point b. On a

$$\lim_{x\to b} h(x) = \lim_{x\to b} \frac{f(x)-f(b)}{x-b} = f'(b).$$

La fonction h est donc prolongeable par continuité au point b et la valeur de son prolongement au point b est $h(b) = f'(b)$.

c) i) Le résultat à montrer fait penser à la conclusion du théorème des valeurs intermédiaires. La fonction g est continue sur $[a,b]$ (questions a) et b)) et on a $g(a) = f'(a)$ et $g(b) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. On sait que $f'(a) \leq k \leq f'(b)$ par hypothèse. Comme $k \leq \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ on a donc

$$g(a) = f'(a) \leq k \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = g(b).$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires (g est continue sur $[a,b]$ et $g(a) \leq k \leq g(b)$) il existe $d \in [a,b]$ tel que $k = g(d)$.

ii) Le résultat fait plutôt penser ici au théorème des accroissements finis. On vient de montrer qu'il existe $d \in [a,b]$ tel que $k = g(d)$. Soit $d = a$ et alors $k = g(a) = f'(a)$ et le résultat est vrai avec $c = a$, soit $d \neq a$ et alors $k = g(d) = \dfrac{f(d)-f(a)}{d-a}$. Comme la fonction f est dérivable sur $[a,b]$, et donc a fortiori sur $[a,d]$, d'après le théorème des accroissements finis il existe $c \in]a,d[\subset [a,b]$ tel que $\dfrac{f(d)-f(a)}{d-a} = f'(c)$ et donc $k = f'(c)$.

d) i) Le raisonnement est le même que dans le cas précédent mais appliqué cette fois à la fonction h sur $[a,b]$. Celle-ci est continue d'après les questions a) et b) et on a $h(a) = \dfrac{f(a)-f(b)}{a-b} = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ et $h(b) = f'(b)$. On sait que $f'(a) \leq k \leq f'(b)$ par hypothèse. Comme $k \geq \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ on a donc

$$h(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq k \leq f'(b) = h(b).$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires (h est continue sur $[a,b]$ et $h(a) \leq k \leq h(b)$) il existe $d \in [a,b]$ tel que $k = h(d)$.

ii) Ici aussi le raisonnement est le même que dans le cas précédent. On vient de montrer qu'il existe $d \in [a,b]$ tel que $k = h(d)$. Soit $d = b$ et alors $k = g(b) = f'(b)$ et le résultat est vrai avec $c = b$, soit $d \neq b$ et alors $k = h(d) = \dfrac{f(d)-f(b)}{d-b}$. Comme la fonction f est dérivable sur $[a,b]$, et donc a fortiori sur $[d,b]$, d'après le théorème des accroissements finis il existe $c \in]d,b[\subset [a,b]$ tel que $\dfrac{f(d)-f(b)}{d-b} = f'(c)$ et donc $k = f'(c)$.