Université de Cergy-Pontoise | **Mardi 12 janvier 2016**
UFR de Sciences et techniques | **L1 Mathématiques**

Examen Fonctions de la variable réelle (Session1)

Durée : 2 heures 30 minutes

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1 : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.
a) Écrire la définition mathématique avec des quantificateurs de la propriété

"f est continue en x_0".

b) On considère la propriété

$$(P) \qquad \exists k > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \ |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

Écrire la négation de cette propriété.
c) Est-ce qu'une fonction f satisfaisant la propriété (P) est continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2 : a) Calculer (si elles existent) les limites suivantes

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(5x)}{x}, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + 1}{2x^3 + x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\sin(5x \sin(x))}{x^2}.$$

b) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 en une fonction $\tilde{f}$ que l'on précisera.

Exercice 3 : Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction

$$f(x) = \sin x - \ln(1 + x).$$

En déduire, si elle existe, la valeur de la limite $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \ln(1 + x)}{x^2}$.

T.S.V.P.

Exercice 4 :

I. Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle fermé $[0,+\infty[$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]0,+\infty[$. On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(0)$.

a) On définit la fonction g sur $[0,1]$ par

$$g(t) = \begin{cases} f(-\ln(t)), & 0 < t \leq 1, \\ f(0), & t = 0 \end{cases}$$

Montrer que la fonction g est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$.
b) Calculer $g(1)$ et $g'(t)$.
c) Enoncer le théorème de Rolle et en déduire qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $g'(c) = 0$.
d) En déduire qu'il existe une valeur $d \in]0,+\infty[$ tel que $f'(d) = 0$.

II. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On suppose que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}.$$

Montrer qu'il existe $d \in \mathbb{R}$ tel que $f'(d) = 0$.

Indications : On pourra déterminer une fonction $\varphi :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$ *vérifiant*
a) φ *est dérivable sur* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,
b) $\varphi'(t) > 0$ *pour tout* $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,
c) $\lim\limits_{t\to-\frac{\pi}{2}} \varphi(t) = -\infty$ *et* $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}} \varphi(t) = +\infty$,
puis considérer la fonction

$$g(t) = \begin{cases} f(\varphi(t)), & si\ -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}, \\ l, & si\ t = -\frac{\pi}{2}\ et\ \ t = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

On adaptera enfin la méthode vue en ***I*** *pour montrer le résultat.*