CY Cergy Paris Université
Date: Janvier 2025

Examen Analyse 1 - MIPI (Session 1)
Durée: 2 heures, calculatrices et documents interdits

Exercice 1.
(1) Soit $a, b \in \mathbb{R}$, écrire la contraposée de $P : a > b \Rightarrow a^2 + 1 \geq b^2$.
(2) Calculer les limites suivantes:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x}; \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{e^x};$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x^2 + 2x + 6}; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4}.$$

(3) Calculer les dérivées d'ordre 1, 2 et 3 de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x^2 + 1)$.
(4) Déterminer le DL en 0 à l'ordre 3 de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2 + x).\ln(1 + x)$.
(5) Calculer les intégrales $\int_0^1 x^4 dx$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x).[\sin(x)]^7 dx$.
(6) Soient f et g deux fonctions dérivables en 0 telles que $f(0) = g(0) = 3$, $f'(0) = 2$ et $g'(0) = 1$. Justifier, en utilisant la définition de la dérivée, que $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-3}{g(x)-3} = 2$.

Exercice 2.
Soit $f :]2; +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{x^3-2x^2-8}{x^2-4}$.
(1) Calculer la dérivée de f; soit $g :]2; +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = x^3 - 12x + 32$. Justifier que pour tout $x \in]2; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{x.g(x)}{(x^2 - 4)^2}.$$

(2) Dresser le tableau de variations de la fonction g. En déduire le signe de g, puis la variation de f.

Exercice 3.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction infiniment dérivable telle que $f(0) = 2$, $f'(0) = 0$ and $f''(0) = 6$.
(1) Déterminer les coefficients a_0, a_1 et a_2 tels que pour tout x proche de 0,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + x^2.\epsilon(x),$$

où $\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$.
(2) (Bonus) Justifier brièvement que 0 est un minima local de f.