Examen Analyse 1 – 2024 – session 1 – MIPI

Exercice 1 : 1.1 non P : $\forall x \in I$, $x = t^2$ et $x^2 \geqslant t$

1.2 : non Q : $\exists x \in I$, $x < 0$ et $x^2 \geqslant 4$

1.3 : $\lim\limits_{x\to\infty} x^7 e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to\infty} x e^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^7+x}{e^x} = 0$

$\frac{e^{7x}-1}{3x} = \frac{e^{7x}-1}{7x} \times \frac{7}{3}$ or $\lim\limits_{u\to 0} \frac{e^u-1}{u} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{7x}-1}{3x} = \frac{7}{3}$

1.4 : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2\cos(1+x^3)$

1.5 : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}} = \frac{1}{8\sqrt{x(1+\sqrt{x})(1+\sqrt{1+\sqrt{x}})}}$

1.6 : $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_1(x) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_2(x)\right) = x + x^2 + x^2\varepsilon_3(x)$ avec $\lim\limits_0 \varepsilon_i = 0$

1.7 : $g(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^3\varepsilon(x)$ $\qquad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$ $\lim\limits_0 \varepsilon = 0$

$h(x) = (1+x+x^2+x^3)\left(2x - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3}\right) + x^3\varepsilon(x) = 2x + 0x^2 + \left(2-2+\frac{8}{3}\right)x^3 + x^3\varepsilon(x) = 2x + \frac{8}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)$

1.8 : $\int_{-2}^{-1} t^{-3}\,dt = \left[-\frac{1}{2}t^{-2}\right]_{-2}^{-1} = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{8}$ $\|$ $I_2 \overset{IPP}{=} \left[t\frac{e^{3t}}{3}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{3t}}{3}\,dt = \frac{e^3}{3} - \left[\frac{e^{3t}}{9}\right]_0^1 = \frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9}$.

Exercice 2 : 1 : f n'est pas injective car $f(2) = f(5)$

f n'est pas surjective car pour tout $y \in [0,6]$, il existe $x \in [0,6]$ tq $f(x) = y$.

$\forall x \in [0,6]$ $f(x) \neq 0$.

2.2 : $f^{-1}([2,5]) = [0;5]$

2.3 : La proposition P est fausse car pour $x_1 = 0$ il n'existe aucun $x_2 \in [2;6]$ tel que $f(x_2) = 6 = f(0)$

Exercice 3 :

3.1 : f est dérivable en 0 si $\tau(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x}$ a une limite finie en 0. on note alors $f'(0)$ cette limite. $\left(f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}\right)$

3.2 : Si f possède un DL_1 en 0 alors $\tau(x) = \frac{a+bx+x\varepsilon(x)-a}{x} = b + \varepsilon(x) \xrightarrow{x\to 0} b$

donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = b$

3.3 : Posons $\varepsilon(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} - f'(0)$ et $\varepsilon(0) = 0$ on a bien $\lim\limits_0 \varepsilon = 0$

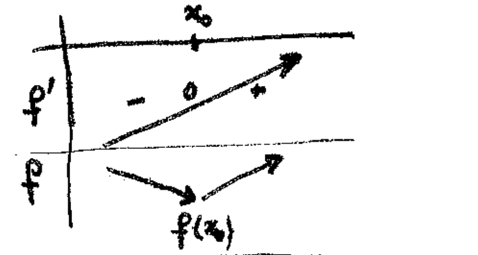
de plus on a $f(x) = f(0) + f'(0)x + x\varepsilon(x)$ donc f possède un DL_1 en 0.

Exercice 4 : $f'' > 0$ donc f' est strictement croissante.

4.1 : $f'(x_0)$ donc $f'(x) < 0$ si $x < x_0$ et $f'(x) > 0$ si $x > x_0$.

donc f est decroissante sur $]-\infty; x_0]$ et croissante sur $[x_0, +\infty[$.

4.1



4.2 : Tangente en a : $y = f(a) + f'(a)(x-a)$

Posons $g(x) = f(x) - (f(a) + f'(a)(x-a))$

donc $g'(x) = f'(x) - f'(a)$ donc $g''(x) = f''(x) > 0$

donc $g(x) \geqslant g(a)$ or $g(a) = 0$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) \geqslant f(a) + f'(a)(x-a)$