L1 MIPI
10 janvier 2024
Durée 2 heures

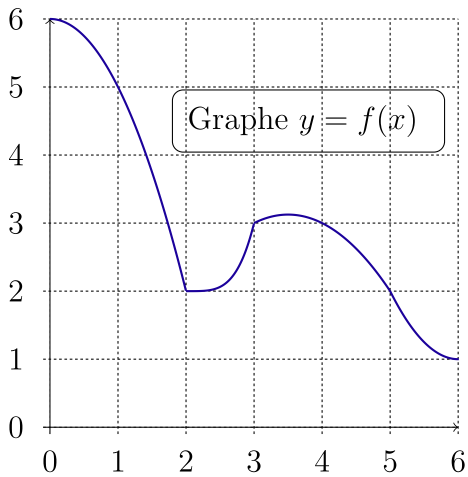
Examen mathématiques Analyse 1

L'utilisation ou la consultation de téléphone est formellement interdite, les calculatrices, les téléphones et les objets connectés doivent être rangés dans un sac et éteints. Les documents sont interdits. L'énoncé sera rendu dans la copie.

Exercice 1 (Calcul sur environ 12 points):

1. Soit t un réel, et I un intervalle de $\mathbb{R}$, écrire la négation de P : $\exists x \in I, x \neq t^2$ ou $x^2 < t$.
2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, écrire la négation de Q : $\forall x \in I,\ x < 0 \Longrightarrow x^2 < 4$.
3. Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^7+x}{e^x}$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{7x}-1}{3x}$.
4. Calculer la dérivée de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(1+x^3)$
5. Calculer la dérivée de la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}$
6. Déterminer le DL_2 en 0 de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - \cos(x)$
7. Déterminer le DL_3 en 0 des fonctions définies sur $]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}[$ par $g(x) = \frac{1}{1-x}$ et $h(x) = \frac{\ln(1+2x)}{1-x}$
8. Calculer les intégrales $I_1 = \displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{1}{t^3}\,\mathrm{d}t$ et $I_2 = \displaystyle\int_0^1 te^{3t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2 (Sur environ 4 points):



Soit $f : [0;6] \to [0;6]$ une fonction dont le graphe est représenté ci contre,

1. La fonction f est-elle injective ? surjective ? Justifier.
2. Déterminer $f^{-1}([2;6])$.
3. La proposition P suivante est-elle vraie ? On justifiera rapidement la réponse.
   $P : \forall x_1 \in [0;3], \exists x_2 \in [2;6]; f(x_1) = f(x_2)$.

Exercice 3 (Cours sur environ 3 points): Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on rappelle que f possède un développement limité d'ordre 1 (DL_1) en 0, si il existe $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a, b \in \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a + bx + x\varepsilon(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

1. Rappeler les définitions de "f est dérivable en 0" et de "$f'(0)$".
2. Montrer que si f possède un DL_1 en 0, alors f est dérivable en 0.
3. Montrer que si f est dérivable en 0, alors f possède un DL_1 en 0.

Exercice 4 (Exercice théorique sur environ 3 points): Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable, dont la dérivée seconde est strictement positive ($\forall x \in \mathbb{R};\ f''(x) > 0$). On pourra utiliser des tableaux de variations pour résoudre l'exercice.

1. Montrer que si il existe un réel x_0 où la dérivée de f s'annule ($f'(x_0) = 0$) alors f possède un minimum en x_0.
2. Démontrer que la courbe représentative de f se trouve au-dessus de chacune de ses tangentes.
3. *(Bonus)* Montrer que pour deux réels a et b la corde (le segment) joignant $(a, f(a))$ à $(b, f(b))$ se trouve au-dessus de la courbe représentative de f.