Analyse 1 – 2022/2023.

Exo 1 : $f(x)\left(g(x)-g(0)\right)+\left(f(x)-f(0)\right)g(0)$

$= f(x)g(x) - f(x)g(0) + f(x)g(0) - f(0)g(0) = f(x)g(x) - f(0)g(0)$.

$$\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0} = \frac{f(x)\left(g(x)-g(0)\right)+\left(f(x)-f(0)\right)g(0)}{x} = f(x)\,\frac{g(x)-g(0)}{x} + \frac{f(x)-f(0)}{x}\,g(0)$$

or g est derivable à 0 donc $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x} = g'(0)$

et f est derivable en 0 donc $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0)$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$ car f derivable en 0.

donc $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x} = f(0)\,g'(0) + f'(0)\,g(0)$.

Exo 2.1 : $\exists x\in\mathbb{R}\quad x^2\leqslant x$ et $x^3 > x^2$

2.2 : $\exists x,y\in\mathbb{R}\quad xy>0$ et $(x\leqslant 0$ et $y\geqslant 0)$.

2.3 : $\frac{2e^x-3x}{e^x} = 2-3xe^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 2$ car par croissance comparée $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$.

2.4 : $\frac{\ln(1+2\sin x)}{3x} = \frac{\ln(1+2\sin x)}{2\sin x}\cdot\frac{2\sin x}{3x} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{2}{3}$ car $\lim\limits_{u\to 0}\frac{\ln(1+u)}{u} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin x}{x} = 1$

2.5 : $f'(x) = \frac{e^x(1+x)-e^x}{(1+x)^2} = \frac{xe^x}{(1+x)^2}$

2.6 : $f'(x) = \frac{-2x\sin(x^2)}{2+\cos(x^2)}$

2.7 : $f(x) = 1+x+x^2+2\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)+x^2\varepsilon(x) = 3+3x+2x^2+x^2\varepsilon(x)$. avec $\lim\limits_0\varepsilon = 0$

2.8 : $f(x) = \frac{1}{\cos x}e^{2x} = \frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon_1(x)}\left(1+2x+\frac{(2x)^2}{2}+x^2\varepsilon_2(x)\right) = \left(1+\frac{x^2}{2}\right)\left(1+2x+2x^2\right)+x^2\varepsilon_3(x)$

$= 1+2x+\frac{5}{2}x^2+x^2\varepsilon_4(x)$.

avec $\lim\limits_0 \varepsilon_i = 0$.

2.9 : $I_1 = \int_1^2 t^{-3}\,dt = \left[\frac{-1}{2}t^{-2}\right]_1^2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-1\right) = \frac{3}{8}$.

2.10 : $I_2 = \int_1^4 \frac{e^{2\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,dt = \int_1^2 2e^{2x}\,dx = \left[e^{2x}\right]_1^2 = e^4-e^2$ avec $\left|\begin{array}{l} x=\sqrt{t} \\ dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt \\ t=1 \longleftrightarrow x=1 \\ t=4 \longleftrightarrow x=2 \end{array}\right.$

Exo 3 : $f(x) = 3xe^{\frac{1}{x}}$

1) $\forall x\in\mathbb{R}_+^*\quad f'(x) = 3e^{\frac{1}{x}} + 3x\left(-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right) = \left(1-\frac{1}{x}\right)3e^{1/x} = 3\,\frac{x-1}{x}\,e^{1/x}$

2) $3\,\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \xrightarrow{x\to 0} +\infty$ car $\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{e^y}{y}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 3xe^{\frac{1}{x}} = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$

3)

x	0		1		
f'	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	↘	$3e$	↗	$+\infty$

4) $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 3$ $\quad f(x)-3x = 3x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right) = 3\left(\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}\right)$

or $\lim\limits_{u\to 0}\frac{e^u-1}{u} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-3x = 3$

La droite d'equation $y=3x+3$ est asymptote à la courbe representative de f.

Exo 4 : 1) $f^{-1}(B) = \{x\in E\ /\ f(x)\in B\}$ $\quad f$ est injective si $\forall x,x'\in E\ f(x)=f(x') \Rightarrow x=x'$.

2) $f(A)\cap f(B)\neq\emptyset \Rightarrow A\cap B\neq\emptyset$ $\quad$ 3) Si f est injective et $f(A)\cap f(B)\neq\emptyset$ il existe $a\in A$ et $b\in B$ tel que $f(a)=f(b)$ or f est injective donc $a=b\in A\cap B$ donc $A\cap B\neq\emptyset$.

4) $A=\{0\}$; $B=\{1\}$ on a $h(A)=\{2\}=h(B)$ donc $A\cap B=\emptyset$ et $h(A)\cap h(B)\neq\emptyset$

5) Montrer f injective $\quad$ Si $f(x)=f(x')$ en posant $A=\{x\}$ et $B=\{x'\}$ on a $f(A)\cap f(B)\neq\emptyset$ donc $A\cap B\neq\emptyset$ donc $\{x\}\cap\{x'\}\neq\emptyset$ donc $x=x'$ donc f injective.