L1 MIPI
11 janvier 2023
Durée 2 heures

Examen mathématiques Analyse 1

L'utilisation ou la consultation de téléphone est formellement interdite, les calculatrices et les téléphones doivent être rangés et éteints. Les documents sont interdits. L'énoncé sera rendu dans la copie.
Barème indicatif : 2+10+4+4

Exercice 1 (Cours): En utilisant le résultat suivant : si deux fonctions ont chacune une limite finie en 0, alors leur fonction produit a une limite en 0, égal au produit de leur limite respective. Démontrer le résultat suivant : **pour deux fonctions f et g dérivables en 0 leur produit est dérivable en 0 et**

$$(fg)'(0) = f'(0)g(0) + f(0)g'(0)$$

On pourra commencer par vérifier que $f(x)g(x) - f(0)g(0) = f(x)\big(g(x) - g(0)\big) + \big(f(x) - f(0)\big)g(0)$

Exercice 2 (Calcul):

1. Donner la négation de : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > x$ ou $x^3 \leq x^2$.
2. Donner la négation de : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ xy > 0 \Longrightarrow (x > 0$ ou $y < 0)$.
3. Déterminer la limite : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2e^x - 3x}{e^x}$
4. Déterminer la limite : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + 2\sin x)}{3x}$
5. Calculer la dérivée de la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x}$
6. Calculer la dérivée de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(2 + \cos(x^2))$
7. Déterminer le DL_2 en 0 de la fonction définie sur $]-\infty; 1[$ par $f(x) = \frac{1}{1-x} + e^x$
8. Déterminer le DL_2 en 0 de la fonction définie sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ par $f(x) = \frac{1}{\cos x}e^{2x}$
9. Calculer l'intégrale $I_1 = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t^3}\,\mathrm{d}t$.
10. Calculer l'intégrale $I_2 = \displaystyle\int_1^4 \frac{e^{2\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$, on pourra effectuer le changement de variable $x = \sqrt{t}$.

Exercice 3: Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 3xe^{\frac{1}{x}}$

1. Calculer $f'(x)$.
2. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
3. Dresser le tableau de variations de f.
4. Montrer que le graphe de f possède une asymptote oblique dont on déterminera une équation.

Exercice 4: Soit E et F deux ensembles, $f : E \to F$, et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Pour $A \in \mathcal{P}(E)$ et $B \in \mathcal{P}(F)$ on rappelle la définition de $f(A)$: $f(A) = \{y \in F / \exists x \in A, f(x) = y\}$.

1. Rappeler les définitions de $f^{-1}(B)$ et de "f est injective".
2. Quelle est la contraposée de $A \cap B = \varnothing \Rightarrow f(A) \cap f(B) = \varnothing$.
3. En déduire que si que si f est injective alors $\forall A, B \in \mathcal{P}(E),\ A \cap B = \varnothing \Rightarrow f(A) \cap f(B) = \varnothing$.
4. Soit $h : \{0; 1\} \to \{2; 3\}$ définie par $h(0) = h(1) = 2$, déterminer A et B telles que $A \cap B = \varnothing$ et $f(A) \cap f(B) \neq \varnothing$
5. Montrer que si f a la propriété suivante : $\forall A, B \in \mathcal{P}(E),\ A \cap B = \varnothing \Rightarrow f(A) \cap f(B) = \varnothing$ alors f est injective.
