Exam 2022 _ Analyse 1.

Exercice 1 : 1) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_1(x)$ et $\ln(1+2x) = 2x - \frac{(2x)^2}{2} + x^2\varepsilon_2(x)$
avec $\lim_0 \varepsilon_i = 0$

2) $f'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} = 1 + \ln x$ et $g'(x) = -2e^{2x}\sin(e^{2x})$

3) Non P : $\exists x \in \mathbb{R}_+^*$, $|x-1| \leq 2$ et $|f(x) - f(1)| > |x-1|$

4) $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$. $\frac{f(x)-f(-x)}{x} = \frac{f(x)-f(0)}{x} + \frac{f(0)-f(-x)}{0-(-x)} \xrightarrow[x\to 0]{} 2f'(0)$

Exercice 2 : $I_1 = \int_1^2 \frac{1}{t^2}\,dt = \int_1^2 t^{-2}\,dt = \left[-t^{-1}\right]_1^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos(2t)\,dt$ effectuons une integration par partie $u(t) = t$ $u'(t) = 1$
$v'(t) = \cos 2t$ $v(t) = \frac{1}{2}\sin 2t$

$= \left[t\ \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin 2t\,dt = \frac{\pi}{4}\sin\pi - 0 - \left[-\frac{1}{4}\cos(2t)\right]_0^{\pi/2} = -\left(-\frac{1}{4}\cos\pi + \frac{1}{4}\cos 0\right) = \frac{-1}{2}$.

Exercice 3 : $\frac{2+e^x}{3-2e^x} = \frac{2e^{-x}+1}{3e^{-x}-2} \xrightarrow{x\to\infty} \frac{0+1}{3\times 0-2} = \frac{-1}{2}$.

$\frac{x + x^2e^{-x}}{3x+5e^{-x}} = \frac{1+xe^{-x}}{3+5\frac{1}{x}e^{-x}} \xrightarrow{x\to+\infty} \frac{1}{3}$ car $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}e^{-x} = 0$

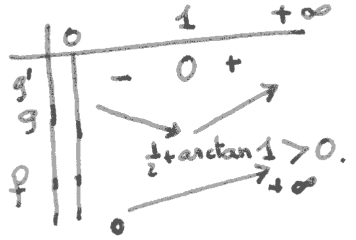
$\frac{\sin(2x)\ln(1+3x)}{x^2} = \frac{\sin(2x)}{2x} \times \frac{\ln(1+3x)}{3x} \times 6 \xrightarrow{x\to 0} 6$ car $\begin{cases} \lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} = 1. \\ \lim_{u\to 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1. \end{cases}$

Exercice 4 : $f(x)g(x) = (1+x+2x^2)(2x+x^2) + x^2\varepsilon_3(x) = 2x+2x^2+x^2+x^2\varepsilon_4(x) = 2x+3x^2+x^2\varepsilon_4(x)$
comme $\lim_0 g = 0$ $f\circ g(x) = 1 + (2x+x^2) + 2(2x+x^2)^2 + x^2\varepsilon_5(x) = 1+2x+9x^2+x^2\varepsilon_6(x)$

$\frac{f(g(x))-1-2x}{f(x)g(x)-2x} = \frac{9x^2+x^2\varepsilon_6(x)}{3x^2+x^2\varepsilon_4(x)} = \frac{9+\varepsilon_6(x)}{3+\varepsilon_4(x)} \xrightarrow{x\to 0} \frac{9}{3} = 3$

Exercice 5 : $f'(x) = 2x\ \mathrm{Arctan}\,x + (1+x^2)\times\frac{1}{1+x^2} = 1 + 2x\ \mathrm{Arctan}\,x = 2x\ g(x)$.

$g'(x) = \frac{-1}{2x^2} + \frac{1}{1+x^2} = \frac{2x^2-1-x^2}{2x^2(1+x^2)} = \frac{(x-1)(x+1)}{2x^2(1+x^2)}$



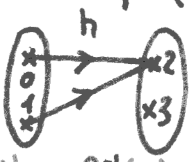
$f'(x) = 2x\ g(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$

Exercice 6 : $f : E \to F$ $A \subset E$ et $B \subset F$

1) $f(A) = \{y \in F / \exists x \in A,\ y = f(x)\}$ $f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}$

2) Soit $x \in A$ alors $f(x) \in f(A)$ donc $x \in f^{-1}(f(A))$ donc $A \subset f^{-1}(f(A))$

3)



Pour $A = \{0\}$
$h(A) = \{2\}$
$h^{-1}(h(A)) = \{0;1\}$

4) Soit $x \in f^{-1}(B) \cap A$ donc $x \in A$ et $f(x) \in B$
donc $f(x) \in f(A) \cap B$ donc $x \in f^{-1}(f(A) \cap B)$

5) On suppose que $f(A) \cap f(E \setminus A) = \emptyset$, montrons que $f^{-1}(B \cap f(A)) \subset f^{-1}(B) \cap A$
Soit $x \in f^{-1}(B \cap f(A))$ on a donc $f(x) \in B$ et $f(x) \in f(A)$ donc $x \in f^{-1}(B)$.
$f(x) \in f(A)$ cela ne prouve pas directement que $x \in A$ mais si $x \notin A$, $x \in E \setminus A$ et $f(x) \in f(A) \cap f(E\setminus A)$ Absurde
donc $x \in A$ donc $x \in f^{-1}(B) \cap A$. donc $f^{-1}(B \cap f(A)) \subset f^{-1}(B) \cap A$ l'autre inclusion : 6.4