

## Examen Analyse 1, session 2

Documents et calculatrices interdits. Les téléphones doivent être éteints, la possession durant le contrôle d'objets connectés (montre, lunettes,...) est strictement interdite. Barème indicatif sur 20 : 5+4+7+4

**Exercice 1:** Déterminer  $l_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \ln(1 + 3x)}{x}$  et  $l_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin(2x)}{x^3}$

Pour  $l_2$  on pourra utiliser un développement limité.

**Exercice 2:** Calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos(2t) dt$$

**Exercice 3:** Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = xe^{-\sqrt{x}}$

1. Calculer  $f'(x)$  pour  $x \in ]0; +\infty[$ .
2. Dresser le tableau de variations de  $f$ .
3. Déterminer la limite de  $f$  en plus l'infini.
4. Montrer que  $f$  possède un maximum que l'on déterminera.
5. La fonction  $f$  est-elle dérivable à droite en 0 ?

**Exercice 4:**

On dit qu'une fonction  $g : [0; 2] \rightarrow [0; 2]$  vérifie la propriété  $\mathcal{P}$  si :

$$\forall x, t \in [0; 2], x \geq t + 1 \Rightarrow g(x) \geq g(t) + 1$$

1. Pour une fonction  $g : [0; 2] \rightarrow [0; 2]$ , énoncer la négation de la propriété  $\mathcal{P}$ .  
On justifiera rapidement chacune des réponses aux questions suivantes :
2. La fonction identité vérifie-t-elle la propriété  $\mathcal{P}$  ?
3. Une fonction constante peut-elle vérifier la propriété  $\mathcal{P}$  ?
4. Démontrer qu'une fonction  $g$  qui vérifie la propriété  $\mathcal{P}$ , doit vérifier  $g(0) = 0$ ,  $g(1) = 1$  et  $g(2) = 2$ .
5. La fonction  $f$  dont le graphe est donné ci-contre semble-t-elle vérifier la propriété  $\mathcal{P}$  ?
6. Représenter le graphe d'une fonction  $g$  qui vérifie la propriété  $\mathcal{P}$ , mais qui n'est pas croissante.

Graphe  $y = f(x)$

