Examen _ Analyse 1 _ 2020/2021.

Exercice 1. : 1 La fonction f n'est pas bijective car $f(3)=f(4)$

2. $f : [0;2] \to [2;6]$ semble bijective
3. La proposition est vrai en effet soit $x_1 \in [4,5]$ $f(x_1) \in [2;3]$ or $f([0;2]) = [2;6] \supset [2;3]$, il existe donc $x_2 \in [0;2]$ tel que $f(x_2) = f(x_1)$
4. La proposition est vrai pour $t=0$ en effet $\forall x \in [5;6]$ (c'est à dire $|x-t| \leqslant 1$) on a bien $f(x) \in [5;6]$ donc $|f(x)-6| \leqslant 1$ donc $|f(x)-f(0)| \leqslant 1$.
5. $b=2$ (ou $b=3$) et a est l'unique point de $[3;4]$ pour lequel la tangente est horizontale.

Exercice 2. : On sait que $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ $\quad \dfrac{2+\ln x}{3-2\ln x} = \dfrac{\overbrace{\frac{2}{\ln x}}^{\to 0} + 1}{\underbrace{\frac{3}{\ln x}}_{\to 0} - 2}\Bigg) \xrightarrow{x \to 0^+} -\dfrac{1}{2}$.

On sait que $\dfrac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow{x\to 0} 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} 2x = 0$ d'où $\dfrac{\ln(1+2x)}{5x} = \dfrac{\ln(1+2x)}{2x} \times \dfrac{2}{5} \xrightarrow{x\to 0} \dfrac{2}{5}$

On sait que $\dfrac{\sin x}{x} \xrightarrow{x\to 0} 1$ et $x^2 \xrightarrow{x\to 0} 0$ donc $\dfrac{\sin x^2}{x^2} \xrightarrow{x \to 0} 1$

donc $\dfrac{\sin(x^2)}{x} = x \cdot \dfrac{\sin x^2}{x^2} \xrightarrow{x\to 0} 0$ on en déduit que $\ell_3 = \dfrac{2}{5}$.

Exercice 3 : $I_1 = \int_0^1 t \, dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$.

$I_2 = \int_0^{\pi/2} t \sin t \, dt$ on va effectuer une IPP avec $\begin{cases} u(t) = t & v'(t) = \sin t \\ u'(t) = 1 & v(t) = -\cos t \end{cases}$

$= \left[-t\cos t\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos t \, dt = 0 - 0 + \left[\sin t\right]_0^{\pi/2} = 1$

$I_3 = \int_1^4 \dfrac{2e^{3\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}} dt$ effectuons un changement de variable en posant $u = \sqrt{t}$ $\quad \dfrac{du}{dt} = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ $\quad du = \dfrac{1}{2\sqrt{t}} dt$ $\quad$ $t=1 \longleftrightarrow u=1$, $t=4 \longleftrightarrow u=2$

$= \int_1^2 2e^{3u} du = \left[\frac{2}{3} e^{3u}\right]_1^2 = \frac{2}{3}\left(e^6 - e^3\right)$

Exercice 4 : $2\sin x = 2x + x^2 \varepsilon_1(x)$ avec $\lim\limits_0 \varepsilon_i = 0$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \varepsilon_2(x)$

$e^{2\sin x} = 1 + 2x + 2x^2 + \varepsilon_3(x)$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon_4(x)$

$\ln(1-3x) = -3x - \frac{9x^2}{2} + x^2 \varepsilon_5(x)$

$f(x) = e^{2\sin x} \ln(1-3x) + 3x = (1+2x)(-3x - \frac{9}{2}x^2) + 3x + x^2\varepsilon_6(x) = -6x^2 - \frac{9}{2}x^2 + x^2 \varepsilon_7(x)$

D'où $\dfrac{f(x)}{x^2} = -\dfrac{21}{2} + \varepsilon_7(x)$ d'où $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = -\dfrac{21}{2}$

Exercice 5 :

1. $f'(x) = e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} = \left(1-\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}} = \frac{x-1}{x}e^{\frac{1}{x}}$ pour $\forall\, x \in \left]0;+\infty\right[$.

2. $\forall x \in \left]0;+\infty\right[\quad f'(x) \geqslant 0 \iff x \geqslant 1$

x	0		1		$+\infty$
f'	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$\Vert$	$\searrow$		$\nearrow$	

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{t\to 0} e^t = 1$ donc $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

4. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{-1}e^{t} = +\infty$ d'ou $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \left(\frac{1}{x}\right)^{-1} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$.

5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

Donc $f(x) = x\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x + 1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$.

Donc $f(x) - (x+1) \xrightarrow{x\to\infty} 0$. Le graphe de f admet la droite d'équation $y = x-1$ comme asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.

De plus $f(x) - (x+1) = \underbrace{\frac{1}{x}}_{>0.}\underbrace{\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right)}_{>0 \text{ pour } x \text{ assez grand}}$ car $\lim\limits_{x\to\infty}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

Donc pour x assez grand $f(x) > x+1$ la courbe est au dessus de son asympt.

Exercice 6 :

1. $(UV)' = U'V + UV'$

Posons $U(x) = g(x)$ et $V(x) = (h(x))^{-n}$ $\quad V'(x) = h'(x) \times (h(x))^{-n-1} \times (-n)$.

$f'(x) = g'(x)(h(x))^{-n} - n\, g(x)\, h'(x)\, h(x)^{-(n+1)}$

$= \frac{g'(x)}{h(x)^n} - \frac{n\, g(x)\, h'(x)}{h(x)^{n+1}} = \frac{g'(x)h(x) - n\, g(x)\, h'(x)}{h(x)^{n+1}}$

2. On applique la formule précédente à $\left|\begin{array}{l} g(x) = 1+x^2 \\ h(x) = 1+e^{2x} \\ n = 5 \end{array}\right.$

$$f'(x) = \frac{2x\left(1+e^{2x}\right) - 5\left(1+x^2\right).2e^{2x}}{\left(1+e^{2x}\right)^6} = 2\,\frac{\left(-5+x-5x^2\right)e^{2x} + x}{\left(1+e^{2x}\right)^6}$$