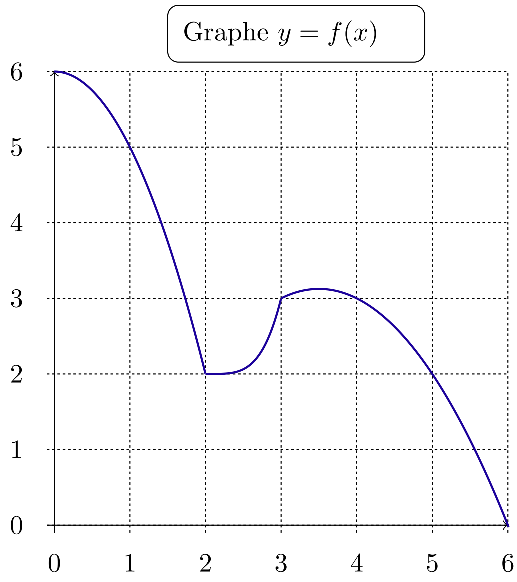
Nom : .... Prénom :... Gpe TD/TP : ....

Documents et calculatrices interdits. Les téléphones doivent être éteints, la possession durant le contrôle d'objets connectés (montre, lunettes,...) est strictement interdite. Barème indicatif sur 30 : 5+5+5+5+5+5

Exercice 1:
Soit $f : [0;6] \to [0;6]$ une fonction dont le graphe est représenté ci contre,



1. La fonction f est-elle bijective ?
2. Déterminer un intervalle I tel que la restriction de f à $[0;2]$, $f|_{[0;2]} : [0;2] \to I$ soit bijective.
3. La proposition suivante est-elle vraie ? On justifiera rapidement la réponse.

$$\forall x_1 \in [4;5], \exists x_2 \in [0;2]; f(x_1) = f(x_2)$$

4. La proposition suivante est-elle vraie ? On justifiera rapidement la réponse.

$$\exists t \in [0;2]; \forall x \in [0;6];\ |x-t| \leq 1 \Rightarrow |f(x)-f(t)| \leq 1$$

5. Représenter sur le graphe ci-joint des réels $a, b \in]0;6[$ tels que f n'est pas dérivable en b, et $f'(a) = 0$.

Exercice 2: Déterminer $l_1 = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2+\ln x}{3-2\ln(x)}$ et $l_2 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+2x)}{5x}$ et $l_3 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\sin(x^2)+\ln(1+2x)}{5x}$

Exercice 3: Calculer les trois intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 t\,\mathrm{d}t \qquad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin t\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad I_3 = \int_1^4 \frac{e^{3\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \quad (\text{on pourra poser } u = \sqrt{t})$$

Exercice 4: Déterminer des DL_2 en 0 des fonctions définies par les formules : e^x ; $2\sin x$; $e^{2\sin x}$; $\ln(1+x)$; $\ln(1-3x)$
En déduire la limite :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2\sin x}\ln(1-3x)+3x}{x^2}$$

Exercice 5: Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

1. Calculer $f'(x)$.
2. Dresser le tableau de variations de f.
3. Déterminer la limite de f en plus l'infini.
4. Déterminer la limite à droite de f en 0.
5. Montrer que le graphe de f possède une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$, et déterminer la position du graphe de f par rapport à cette asymptote pour x assez grand.

Exercice 6: Soit $n \in \mathbb{N}^*$, g, h deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, dérivables, et telles que $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) \neq 0$, on pose

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{g(x)}{h^n(x)} = g(x)\big(h(x)\big)^{-n}$$

1. Rappeler la formule donnant la dérivée d'un produit de fonctions dérivables $(UV)'$, et en déduire la formule

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - ng(x)h'(x)}{h^{n+1}(x)}$$

2. Calculer la dérivée de $f(x) = \frac{1+x^2}{(1+e^{2x})^5}$, on pourra appliquer la formule précédente en précisant bien les choix de g, h et n